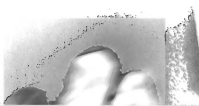
3 3433 06642668 5

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Die

Rechenkunst

in zweenen Theilen

von

N. Schmid.

Erster Theil.

Leipzig,
in der Dyckischen Buchhandlung,
1774.

Digitized by Google

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
286136B
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1944 L

Digitized by Google

Vorrede.

Wenn es mir gelungen ist die weiten Gränzen der Arithmetik, ihrer Vollständigkeit unbeschadet, näher zusammen zu rücken; wenn ich durch weniger Wege dasjenige gefunden, was sonst durch mehr Wege gefunden werden mußte; wenn ich diese gemeinnützige Wissenschaft so abgefasset habe, daß sie besser zu übersehen, leichter zu erlernen, und folglich nicht so leicht wieder zu vergessen ist: so wird man nicht sagen, daß, bey dem Ueberflusse von funfzig Arithmetiken, die Ausarbeitung der ein und funfzigsten eine vergebliche Arbeit gewesen. Ob ich das, was ich mit dem äußersten Fleiße gesucht, gefunden habe, darüber kann ich selbst am wenigsten urtheilen.

Digitized by Google

Vorrede.

Um die Arithmetik recht kurz vorzutragen, dürfte man nur dasjenige, was geschehen soll, und den Grund desselben bey jedem Theile, niederschreiben; die weitere Entwicklung aber, das Verfahren bey besondern Fällen, und die Anwendung auf die mannichfaltigen Gegenstände des menschlichen Lebens dem Leser selbst überlassen. Auf diese Art ließe sich die ganze Arithmetik mit leichter Mühe auf den Raum eines halben Bogens zusammen pressen. Allein, wenn man auch annehmen wollte, daß ein jeder Leser Fähigkeit und Neigung genug besäße, das Fehlende ergänzen zu können; so wäre es doch eben nicht haushälterisch gehandelt, den Verlust der hierauf zu verwendenden Zeit einem jeden Leser, durch einen solchen bloßen Umriß aufzubürden.

Wenn aber auch eine Schrift mehr, als blos die Grundstriche eines Gemähldes, mehr, als blos Materialien zu einem Gebäude enthält; so wird sie für viele Leser schwer seyn, wenn die zu sehr zusammengehäuften Sachen, wegen des zu engen Raumes, der ihnen gegeben ist, sich in einander verwickeln.

Aber

Digitized by Google

Aber auch gerade das Gegentheil von einem zu gepreßten Vortrage kann eine Urſache der Undeutlichkeit werden. Nicht ſelten iſt der Vortrag eben deswegen ſchwer zu verſtehen, weil der Verfaſſer recht ſehr verſtändlich hat ſeyn wollen. Wenn die Ideen, die eine Sache erläutern, oder die Gründe, warum etwas geſchehen oder erfolgen muß, zu häufig zwiſchen den Vortrag gewebt werden; ſo fehlt dem Vortrage die zur Deutlichkeit nothwendige Simplicität: der Leſer verliert in den zu bunten Perioden den Hauptgegenſtand aus dem Geſichte; ſeine Seele kann dem zu oft abgerißnen Leitfaden nicht folgen, und ſeine noch ungebildeten Begriffe werden zerſtreut. Sind außerdem Dinge, die zur Sache nicht gehören, eingemiſchet, ſo verliert ſich der Hauptgegenſtand noch mehr zwiſchen den Nebendingen, und der Vortrag wird leer.

Wenn die gewünſchte Kürze, Deutlichkeit und Vollſtändigkeit von mir nicht erreicht iſt; ſo habe ich ſie nicht erreichen können. Ein Hauptaugenmerk ſind ſie mir die ganze Arbeit hindurch geweſen. Immer habe ich mir meinen Leſer als einen nicht ſcharfdenkenden Kopf vor-

vorgestellet. Was für diesen nothwendig pünktlich gesagt werden mußte, das kann einem schärfer denkenden Leser überflüßig seyn. Diesem darf nur der Weg zu einem Ziele von weitem gezeigt werden, um dasselbe finden zu können, da jener bis zum Ziele selbst geführt werden muß. Da aber das Genie dasjenige blos anzusehen braucht, was der Schwächere ausstudieren muß; so verliert es durch dasjenige, was für ihn überflüßig ist, keine Zeit.

Die Vorschriften, wie man um einen gesuchten Zweck zu erhalten verfahren muß, oder die Regeln der Arithmetik, müssen dem Gedächtnisse so fest eingeprägt seyn, daß sie sich immer ohne Nachdenken von selbst darbieten. Sind aber der Regeln zu viel, so entsteht leicht eine Verwirrung. Man wird zweifelhaft, in welchem Falle diese oder jene Regel anzuwenden ist. Was man durch Mühe und Zeit erlernt hat, und nunmehro anzuwenden weiß; das raubt oft eine Zeit, die ohne Uebung verfließt, dem Gedächtnisse wieder.

Eine kleinere Anzahl von Regeln macht man sich mit weniger Zeit und Mühe eigen:

und man vergißt sie nicht so leicht. Eine Verwirrung ist um desto weniger zu besorgen, je geringer diese Anzahl ist; und man wird um desto fähiger die ganze Rechenkunst zu übersehen.

Durch die Kettenregel, welche der Herr von Rees erst in Aufnahme gebracht, hat die Arithmetik ungemein gewonnen; sie ist dadurch in einen weit kleinern Raum gebracht und sehr erleichtert worden. Denn eine nicht geringe Anzahl Rechnungsarten, die alle eine besondere Bearbeitung forderten, sind deswegen unnütz geworden, weil sie in der Kettenregel zusammenfließen. Daß ich die noch übrige Anzahl Regeln, so viel geschehen konnte, verringert habe, wird man hie und da bemerken.

Den vier Species in ganzen Zahlen kann nichts abgenommen werden; sie leiden, wenn man nicht besondere Fälle ausnimmt, keine Verkürzung.

Die Lehre von den Brüchen wird in den meisten, auch neuen Büchern, so sehr mit Regeln überhäuft, daß diese durch viel Mühe und Zeit erlernten Regeln dem Gedächtnisse, wenn nicht eine beständige Uebung sie demselben gegen-

wärtig erhält, wieder fremd werden müssen. Bey der Multiplication der Brüche trifft man allein drey Regeln an. Wenn eine ganze Zahl durch einen Bruch, wenn ein reiner Bruch durch einen unreinen, und wenn ein unreiner Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt werden soll, so werden oft so viele Regeln gegeben, als Fälle sind. Bey der Division der Brüche ist man, weil hier noch mehrere Fälle sind, noch freygebiger mit Regeln gewesen; man findet hier einen Reichthum von acht Regeln.

Durch die Befolgung einer einzigen leichten Regel, welche im Zusatze des 142sten §phen gezeigt wird, ist man vermögend alle Fälle der Multiplication und Division aufzulösen. Die ganze Lehre von den Brüchen fasset nur sieben Regeln in sich. Das sechste Kapitel bestehet zwar aus neun Aufgaben: allein die ganze Multiplication und Division bedarf nur Einer Regel; und die Berechnung verschiedentlich benamter Größen wird gewöhnlich nicht mit zu den Brüchen gezählt. Die Resolution und Reduction der Brüche habe ich darum gänzlich übergehen können, weil die Fälle, welche hieher gehören, einfache Exempel der Kettenregel

sind,

sind, die ihren Platz unter den Exempeln dieser Regel erhalten haben.

Wie verschiedene vermischte Posten, das ist solche Posten, die aus Größen von ungleicher Art bestehen, z. E. verschiedene Kapitale, die auf ungleich hohe Zinsen und zu ungleichen Zeiten belegt sind, eine verschiedene Anzahl von Pfunden von verschiedenem Werthe, eine verschiedene Anzahl Menschen, die bey ungleichem Tagelohne verschiedene Zeiten arbeiten u. dergl. wie diese vermischten Größen in einem Exempel berechnet werden, dieß pflegt nur, in besondern Fällen, in der Regula Fusti, in der Regel der Gesellschaft, in der Regel der Vermischung zerstreut vorgetragen und verschiedentlich bearbeitet zu werden.

Hieraus aber folgt, daß der Lernende die Bearbeitung dieser besondern Fälle blos auf diejenige Rechnungsart einschränkt, wo er sie findet; es folgt, daß die Regeln sehr gehäuft werden müssen, weil in jedem Falle eine Vorschrift gegeben werden muß, wie dieser und jener Fall, hier so, dort anders, zu bearbeiten ist; es folgt, daß nie eine zusammenhängende

und allgemeine Kenntniß von diesen vermischten Größen, und wie sie in allen Fällen zu behandeln sind, aus dem zerstreuten Unterrichte, der sich nur auf einige besondere Fälle erstreckt, erworben werden kann, und daß der Leser die weiten Gränzen dieser vermischten Größen nicht kennen lernt. Die Weitläuftigkeit, die hier entstehen muß, ist eine Bürde fürs Gedächtnis.

Da nun alle Fälle, welche hier vorkommen, aus Einer Quelle fließen, und die Bearbeitung immer dieselbe ist; so habe ich im eilften Kapitel diese Materie besonders abgehandelt, und ein Ganzes, das sich leicht übersehen läßt, daraus gemacht. Weiß man überhaupt, wie verschiedene vermischte Größen bearbeitet werden, und kennet man den Grund der Bearbeitung; so wird kein Fall dieser Art, wie er auch seyn und zu welcher Rechnungsart er auch gehören mag, jemanden in Verlegenheit setzen.

Aus den wenigen beygefügten Exempeln sieht man schon, daß sich die Rechnung mit vermischten Größen auf unzählige Fälle von mancherley Art erstreckt, daß sie das ohnehin

weit-

weitläuftige Gebiet der Kettenregel noch be-
trächtlich erweitert, und daß die Berechnung
er Flächen und Körper, wenn ihrer auch viel
n Einer Aufgabe befindlich sind, ein Gegenstand
er Rechnung mit vermischten Größen ist.

Diejenigen Vortheile, welche um eine
Rechnung zu verkürzen erfunden werden, müs-
en einen ausgebreiteten Nutzen haben; sie müs-
en sich auf viele Fälle erstrecken. Verkürzen
ie nur die Arbeit in einzelnen Fällen, die sich
elten zeigen, so sind sie keine wahren Vortheile;
ie machen nur die Rechenkunst weitläuftig,
und ihr Nutzen hält der Mühe, diese Vorthei-
le zu erlernen, sie recht anzuwenden und
im Gedächtnisse zu erhalten, nicht das Gleich-
gewicht. Man verliert auf der einen Seite
mehr, als man auf der andern gewinnt. Der
Hr. von Clausberg hat in seiner demonstrativi-
schen Rechenkunst ungemein viel Vortheile ge-
liefert; allein diese Vortheile zu erlernen er-
fordert beynahe so viele Arbeit, als die Erler-
nung der ganzen Arithmetik. Und sind es
denn auch immer wahre Vortheile? Und
wie oft zeigen sich die Fälle, wo sie brauch-
bar sind? Inzwischen habe ich sowohl

im

im 33sten, als auch im 56sten Paragraphen, einige der erheblichsten von ihm entlehnt.

Unter den von mir gefundenen Vortheilen ist vielleicht die Verkürzung der Kettenregel, vornehmlich bey solchen Aufgaben, deren Glieder große Zahlen sind, die sich nicht verkleinern lassen wollen, von einiger Wichtigkeit. Hier kann, wie im 6ten Abschnitt des 8ten Kapitels gezeigt ist, durch eine Subtraction und Addition eine weitläuftige Multiplication und Division vermieden werden: und durch die in der 9ten Aufgabe des 2ten Abschnitts im 6ten Kapitel vorgeschlagene Bearbeitung solcher Größen, deren Glieder durch die Addition mit einander verbunden sind, als Thaler, Groschen, Pfennige, erspart man sich ebenfalls Zeit und Arbeit.

Wer eine leichtere Art zu dividiren, die sich auf alle Fälle erstreckte, finden könnte, der würde den Dank eines jeden Geübten und Ungeübten verdienen. Mir hat die hierauf verwandte Zeit, keinen andern Nutzen geschafft, als daß ich Ursachen gefunden habe, die es mir wahrscheinlich machen, daß

daß eine leichtere und kürzere Division unmöglich ist.

Auf den vorzüglichsten Theil der Arithmetik, auf die Kettenregel, habe ich den äußersten Fleiß, und, wie mich dünkt, nicht vergeblich verwendet. Die einzige Schwierigkeit, die sich nicht selten bey der Kettenregel zeigt, besteht darinn: daß sich oft Glieder in einer Aufgabe finden, bey denen es zweifelhaft ist, in welche Columne sie gesetzt werden müssen. Man hat zwar Regeln gegeben, wie ein Exempel zu ordnen ist, und diese Regeln sind freylich hinlänglich, sehr viele Aufgaben dadurch auflösen zu können: allein sehr oft fasset eine verwickelte Aufgabe solche Glieder in sich, die sich nicht nach der gegebenen Vorschrift ordnen lassen wollen. Wenn nicht das Gedächtniß hier Hülfe leistet, so weiß man nicht, in welcher Columne diese widerspenstigen Glieder ihren Platz erhalten müssen.

Meine Leser selbst können sich überführen, daß sich nach den im 3ten Abschnitte des 8ten Kapitels gegebenen sechs Regeln kein zweifelhafter Fall äußern kann. Wird eine verwickelte Aufgabe

gabe nach diesen Regeln geordnet; so erhalten die unbiegsamen Glieder derselben gewiß ihren rechten Platz. Im übrigen glaube ich in dem 5ten und 8ten Kapitel von der Kettenregel verschiedenes bestimmt zu haben, was noch unbestimmt war.

Die Theorie zeigt, warum man so und nicht anders verfahren müsse; sie zeigt den Grund einer Regel oder eines Satzes; sie lehret die Vortheile, die in besondern Fällen anzuwenden sind, selbst finden, kömmt dem Gedächtnisse zu Hülfe und schärft den Verstand. Sondert man von ihr diejenigen Sätze ab, die fürs gemeine Leben nur speculativisch, nicht nutzbar sind, so macht sie die Arithmetik nicht schwerer, sondern leichter. Man muß aber erwägen, daß die Theorie um der Praxis willen, nicht aber die Praxis um der Theorie willen da ist.

Wenn man arbeitet, ohne zu wissen warum man eben so und nicht anders verfährt, so ist die Arithmetik eine Wissenschaft blos fürs Gedächtniß, nicht für den Verstand; sie ist ein Handwerk. Wird das Gedächtniß ungetreu; so ist man ohne Theorie nicht vermögend,

das

das Vergeßne durch sich selbst wieder herzustellen.

Ein Beweis setzt die Wahrheit der Sache, die bewiesen werden soll, ins Licht; er zeigt den Grund, warum das Gesuchte richtig erfolgen muß. Ist der Beweis leicht und kurz, so überzeugt er stärker, als wenn er schwer und weitläuftig ist. Bey einem leichten Beweise ist die Seele vermögend den Beweis, und dasjenige, was bewiesen wird, in beständiger Verbindung mit einander zu erhalten. Der Beweis ist nur das Licht, welches den bewiesenen Gegenstand sichtbar machen soll: ist das Licht selbst dunkel, so wird es dem Gegenstande wenig Klarheit ertheilen.

Da die Kürze und Leichtigkeit, insofern sie ohne Nachtheil der Gründlichkeit und Vollständigkeit erhalten werden konnte, ein Hauptgegenstand meiner Bemühung gewesen ist, so habe ich die gegebenen Beweise so sinnlich und leicht zu machen gesucht, als mir möglich war.

Solche theoretische Sätze, welche in der Folge nicht angewandt werden konnten, habe

ich

ich darum vermieden, weil sie, ohne in der praktischen Arithmetik zu nutzen, dieselbe nur weitläuftiger machen. Desto sorgfältiger bin ich hingegen gewesen, nichts zu überspringen, was in der Folge auf irgend eine Art brauchbar wird.

Die sogenannten Grundsätze der Arithmetik habe ich deswegen weggelassen, weil sie ein jeder von selbst weiß. Daß, wenn zu zwoen einander gleichen Größen zwo andre gleiche Größen addirt werden, gleichgroße Summen erfolgen, oder mit andern Worten, daß 2 zu 4 addirt immer so viel macht, als wenn 2 zu 4 addirt wird, dieß braucht eigentlich weder gelehrt noch erwiesen zu werden.

Um sich dasjenige, was man erlernet hat, völlig eigen zu machen, und solches vor der Vergessenheit sicher zu stellen; um sich eine Fertigkeit zu erwerben, die vorkommenden Fälle mit Geschwindigkeit und ohne vieles Nachdenken berechnen zu können; dieß erfordert eine hinlängliche Uebung. Es müssen daher eine nicht kleine Anzahl Aufgaben zur Uebung gegeben werden. Wollte man aber in solchen

Exem-

Exempeln, die zu den einfachen Rechnungsarten, zu den vier Species in ganzen und gebrochenen Zahlen gehören, freygebig seyn; so wäre dieß deswegen eine unnütze Verschwendung, weil ein jeder die hieher gehörigen Exempel, ohne Wahl und Nachdenken, wie sie ihm nur einfallen, sich selbst zur Uebung niederschreiben kann.

Bey der Kettenregel hingegen machen verschiedene Umstände eine beträchtliche Anzahl Exempel sehr nothwendig. Soll der Leser den weiten Umfang und den mannichfaltigen Nutzen der Kettenregel kennen lernen, so müssen ihm eine Menge Exempel von allerley Art vorgelegt werden. Eben hierdurch wird er in den Stand gesetzt, einen jeden Fall, der durch die Kettenregel zu berechnen ist, wie er ihm im gemeinen Leben vorkömmt, richtig zu entwickeln. Dieser Nutzen aber wird nicht erreicht, wenn eine Einförmigkeit, welche nur gar zu oft in den praktischen Rechenbüchern angetroffen wird, in den Exempeln bey ihrer noch so großen Anzahl herrscht. Eine solche Einförmigkeit macht den Leser nur mit einem kleinen Theile des Gebiets der Kettenre-

gel bekannt. Eine nichtsbedeutende Aufgabe ist blos deswegen vermögend den Leser in Verlegenheit zu setzen, weil sie ihm fremd ist. Durch die Verschiedenheit der Exempel erwirbt man sich eine Fertigkeit im Ordnen; aber der Leser wird müde, wenn keine Abwechselung der Gegenstände, die er bearbeitet, seine Aufmerksamkeit unterhält. Was von der Kettenregel gesagt ist, das gilt auch von dem Rechnen mit vermischten Größen.

Noch ein Wort! Die Gewohnheit hat es zur Pflicht gemacht, daß die Regel Detri einen beträchtlichen Theil einer Arithmetik ausmachen muß. Ich habe sie gar nicht vorgetragen, und ich würde meinem Grundgesetze: nichts überflüßiges zu lehren, und dem Leser keine entbehrliche Regeln aufzubürden; ungetreu geworden seyn, wenn ich es gethan hätte. Eigentlich aber sind die einfachsten Exempel der Kettenregel von dreyen Gliedern nichts anders, als Exempel der Regel Detri, die dort nur in einer andern Form erscheinen. Die Regel Detri in der gewöhnlichen Form hat in keinem Falle Vorzüge vor der Kettenregel,

gel, da hingegen die Vorzüge der Kettenregel vor der Regel Detri, in allen Aufgaben, welche mehr als drey Glieder enthalten, ungemein groß sind. Neben der Kettenregel auch die Regel Detri vorzutragen, das ist nicht allein ohne Nutzen, sondern auch schädlich. Es ist schädlich, wenn man auch die hierauf verwendete Zeit, welche schlechterdings verloren ist, nicht in Betracht ziehen will; wenn man es nicht achten will, daß die Rechenkunst, ohne dadurch zu gewinnen, nur weitläuftiger wird: denn die vierte Proportionalzahl bald nach dieser, bald nach einer andern Methode suchen, das bildet nur einen ungewissen Rechner. Wird aber die Regel Detri vorgetragen, so muß auch mit gleichem Rechte die verkehrte Regel Detri, die Regula Quinque, und andere Unterabtheilungen der Regel Detri gelehrt werden. Hier würde man wieder in die Weitläuftigkeiten gerathen, welche durch die Kettenregel gänzlich vermieden werden.

Von der Algebra, als dem zweyten Theile, will ich nur dieses sagen: daß ich mich bemühet habe, dieser Wissenschaft das finstere

Ansehen zu benehmen, in welchem sie oft erscheint; daß ich sie auf solche Fälle, die im gemeinen Leben vorkommen, anzuwenden gesucht: und weil die größte Schwierigkeit, die sich bey der Erlernung der Algebra äußert, in der Verfertigung der Gleichungen besteht; so habe ich fast bey jedem Exempel gezeigt, wie die Gleichung entstanden. Die Exempel sind theils von andern entlehnt, theils von mir gemacht. Geschrieben, Hannover den 9ten Febr. 1774.

Inhalt

Inhalt
des ersten Theils.

I. Kap. Von der Decimal-Ordnung. S. 1

II. Kap. Von den vier Rechnungsarten.

1 Abschnitt. Vom Addiren. 9

2. Abschnitt. Vom Subtrahiren. 13

3. Abschn. Vom Multipliciren. 29

4. Abschn. Vom Dividiren. 30

III. Kap. Vom Rechnen mit genannten Zahlen. 52

IV. Kapitel. Von den Proportionen und Progreſſionen.

1. Abschn. Von den Proportionen. 58

2. Abschn. Von den Progreßionen. 68

Inhalt.

V. Kapitel. Etwas von der Kettenregel. S. 71

VI. Kap. Von den Brüchen.

1. Abschn. Von den Eigenschaften der Brüche. 88

2. Abschn. Vom Rechnen mit Brüchen. 96

VII. Kap. Von den Decimalbrüchen.

1. Abschn. Von den Decimalbrüchen überhaupt. 139

2. Abschn. Vom Rechnen mit Decimalbrüchen. 144

VIII. Kap. Von der Kettenregel.

1. Abschn. Was die Kettenregel sey. 159

2. Abschn. Beweis der Kettenregel. 163

3. Abschn. Vom Ordnen der Kettenregel. 166

4. Abschn. Von den Vorzügen der Kettenregel. 173

5. Abschn. Von den Fällen, wo die Kettenregel nicht anzuwenden. 176

6. Abschn. Von den Vortheilen bey der Kettenregel. S. 180

IX. Kap. Exempel der Kettenregel zur Uebung.

1. Abschn. Vermischte Exempel der Kettenregel. 191

2. Abschn. Anwendung der Kettenregel auf die Regel der Gesellschaft. 224

3. Abschn. Anwendung der Kettenregel auf die Regel der Vermischung. 229

4. Abschn.

Inhalt.

4. Abſchn. Mathematiſche Aufgaben. 239

X. Kap. 1 Abſchn. Von der Zins auf Zinsrechnung. 254

2. Abſchn. Von der Interuſurien Rechnung. 259

XI. Kap. Von den Rechnungen mit vermiſchten Größen. 264

Anhang.

Von der abgekürzten Multiplication und Diviſion mit Decimalbrüchen. 300

Anwendung der Decimalbrüche auf die Gegenſtände im bürgerlichen Leben 305

Tafel zur Vergleichung der Fußmaaße 316

Tafel zur Vergleichung der Gewichte 317

Verhältniß verſchiedner Münzen zum Louisd'or 320

Beſtim-

Bestimmung der gebrauchten Verhältnisse.

1 Thaler hat 36 Gr.
1 Groschen — 8 Pfen.
1 Louisd'or hat 5 Thlr.
1 Louisd'or thut $4\frac{2}{3}$ Thlr. Cassengeld.
14 Thlr. Cassengeld ist gleich 15 Thlr. in Louisd'or.
3 Gulden machen 2 Thlr.
1 Centner hat 100 Pfund
1 Pfund hat 32 Loth.
1 Loth hat 4 Quentgen.
1 Oxthoft hat 6 Anker.
1 Anker hat 40 Bouteillen.
1 Morgen hat 120 Quadratruthen.
1 Ruthe hat 16 Fuß.
1 Fuß hat 12 Zoll.
1 Fuß hält $\frac{1}{2}$ Elle.

Die Rechenkunst.

Erstes Kapitel.

Von der Decimalordnung.

§. 1.

Die Rechenkunst ist eine Wissenschaft, durch bekannte Zahlen solche unbekannte Zahlen zu finden, welche dasjenige zeigen, was gefodert wird.

§. 2.

Es ist zu bewundern, wie durch zehn Zeichen unendlich viele Größen so von einander unterschieden werden können, daß so wenig im Schreiben als im Benennen eine Verwechselung der einen Größe mit der andern statt findet. Diese Zeichen sind 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Man nennet sie Ziffern, wenn sie nur einen Theil einer Größe ausdrücken. Zahlen hingegen, wenn man die ganze Größe darunter versteht. Die Zahl 24 besteht aus den Ziffern 2 und 4. 5 ist eine Zahl; in der Zahl 52, ist 5 eine Ziffer.

§. 3.

Alles was sich vermehren und vermindern läßt, ist eine Größe. Alle Zahlen sind daher Größen. Da

man sich nun in der Rechenkunst mit Zahlen beschäftigt; so sind hier Zahlen und Größen gleichgeltende Dinge, und man weis nun, was in der Folge, unter dem Worte Größe verstanden wird.

§. 4.

Eine Einheit ist diejenige Größe, aus welcher eine Zahl zusammengesetzt ist. Eine Einheit in neun Thalern, ist 1 Thaler; in 12 Loth, ist die Einheit 1 Loth; in jeder unbenamten Zahl ist sie 1. Eine jede Zahl, eine jede Ziffer, fasset so viele Einheiten in sich, als ihr Name anzeigt.

§. 5.

Die Ziffern selbst haben ihren unveränderlichen Werth. 4 bedeutet immer vier Einheiten. Aber der Werth der Einheiten in den Ziffern ist nicht beständig, er verändert sich, nachdem eine Ziffer in der ersten, zwoten, dritten Stelle einer Zahl steht. Eben hierdurch, daß die Einheit einer Ziffer einen andern Werth hat, wenn die Ziffer in einer andern Stelle der Zahl steht, ist man vermögend, durch eine Zahl von zwo Ziffern 90, von drey Ziffern 900, von vier Ziffern 9000 u. s. w. besondere Fälle auszudrücken.

Diese große Mannichfaltigkeit rühret mit daher, daß man die gewählten Ziffern, mit andern mehr oder weniger geltenden Ziffern, verwechseln kann. Wenn aber auch diese Verwechselung nicht mehr statt findet; wenn man alle zehn Ziffern, ohne auf ihren Werth zu achten, zusammen schreibt; oder wenn man statt der Ziffern die zehn ersten Buchstaben des Alphabets wählet, und blos auf alle mögliche Versetzungen der Buchstaben, in Ansehung ihrer Stellen sieht, so erhält man schon weit über drey Millionen Reihen, welche alle die Buchstaben von a bis k enthalten, und deren keine der

andern

andern gleich ist. Man findet aber die Anzahl aller möglichen Versetzungen, wenn man unter den Buchstaben die Zahlen von 1 an, nach ihrer natürlichen Ordnung, schreibt, und solche durch einander multiplicirt. Das Produkt giebt die Anzahl aller möglichen Versetzungen. Z. E. man will wissen, wie oft sich 10 Buchstaben versetzen lassen.

a b c d e f g h i k

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Produkt 3628800 mal.

zween Buchstaben konnen 2mal versetzt werden, a b und b a, 3 Buchstaben 6mal, a b c, a c b, b a c, b c a, c a b, c b a. Weil das Produkt der Zahlen von 1 bis 6, 720 ist, so lassen sich 6 Buchstaben 720 mal versetzen. Denenjenigen, welche die Multiplication noch nicht kennen, ist dieses annoch unverständlich. Hier aber war der Ort, wo es gesagt werden mußte.

§. 6.

Weil wir den Arabern, welche von der rechten zur linken Hand lesen, die Erfindung der Zahlen zu danken haben; so hat diejenige Ziffer einer Zahl, welche am äußersten gegen die rechte Hand steht, den geringsten Werth, sie besteht aus schlechten Einern, und gilt nicht mehr als ihr Name sagt. In der Zahl 3754 ist die 4 eine simple 4, sie besteht aus vier schlechten Einheiten, und man nennet die Ziffer einer jeden Zahl, die in der letzten Klasse rechter Hand steht, **Einer**. Eine Ziffer in der zwoten Stelle, ist schon von größerer Wichtigkeit. Die Einheit in dieser Stelle, gilt zehnmal so viel, als eine Einheit in der niedrigsten, und die darinn befindliche 5 bedeutet funfzig. Die Ziffern in dieser Klasse nennet man **Zehner**. Eine Ziffer in der

dritten Stelle gilt zehnmal so viel, als wenn dieselbe Ziffer in der zwoten Classe stünde, und die 7 in obiger Zahl ist siebenhundert. Die vierte Stelle, von der rechten Hand an gezehlet, ist die Stelle der Tausender, die fünfte Stelle die Stelle der Zehntausender: so nimmt die Wichtigkeit der Ziffern bis ins Unendliche zu. Eine jede Ziffer gilt in der Stelle, die sie bekleidet, zehnmal mehr, als wenn sie um eine Stufe niedriger stünde, und zehnmal weniger, als wenn sie eine Stufe höher, gegen die linke Hand ihren Platz hätte. Die Wichtigkeit einer Ziffer kömmt also auf die Stelle an, wo sie steht. Eine 8 in der niedrigsten Stelle ist acht, in der fünften Stelle ist sie achtzigtausend.

Fehlt aber in irgend einer Stufe eine Ziffer, so besetzt man ihren Platz, damit die höhern Ordnungen nicht um zehnmal geringer werden mögen, mit einer Nulle. Die Zahl 20576 besteht aus sechs Einern oder 6, sieben Zehnern oder 70, fünf Hundertern oder 500, keinem Tausender, zween Zehntausendern. Den verschiedenen Werth der Ziffern nach ihren Stellen, nennet man die **Decimalordnung.**

§. 7.

Wie im Schreiben eine jede mögliche Größe, von einer jeden andern möglichen Größe unterschieden werden kann; so kann dieses auch durch Worte geschehen, das ist, man kann von Eins bis ins Unendliche hinauf zehlen. Man zehlet aber nie weiter bis zehn, und bemerkt nur durch besondere hierzu gewählte Namen, wie oft man schon zehn gezehlet habe. Diese Namen sind zwanzig, dreyßig, vierzig u. s. w. Dreyßig sagt: man habe dreymal zehn gezehlet. Ist man bis auf zehnmal zehn gekommen, so muß, um eine Verwirrung zu vermeiden, ein neuer Name da seyn, nämlich **Hundert.** Zehnmal Hundert erhält den Namen

men **Tauſend.** Tauſendmal Tauſend heißt eine **Million**, Tauſendmal Tauſend Millionen heißt eine **Billion**, Tauſendmal Tauſend Billionen eine **Trillion** u. ſ. w. Die noch leeren Räume, welche ſich zwiſchen den Zehnern befinden, werden durch die Einer, und die leeren Räume zwiſchen den Hundertern, durch die Zehner ausgefüllet, 21, 22, und 110, 120, 130.

§. 8.

Aus der Decimalordnung folgt: daß, wenn man eine Zahl, ſie beſtehe aus ſo viel Ziffern ſie wolle, 10, 100, 1000mal gröſſer haben wollte, daß man der gegebenen Zahl nur ein, zwo, oder drey Nullen anhängen dürfe.

Beweis.

Weil die angehängten Nullen die niedrigſten Stellen der Zahl einnehmen, ſo werden dadurch alle Ziffern der Zahl um ſo viele Stufen hinauf gerückt, als Nullen angehängt ſind, wo ſie zehn, hundert oder tauſendmal ſo viel gelten.

§. 9.

Sucht man den zehnten, hunderten, oder tauſendſten Theil einer Zahl, die am Ende Nullen hat; ſo iſt die Theilung geſchehen, wenn man am Ende ein, zwo, oder drey Nullen wegſtreicht. Der Beweis liegt in dem vorigen Beweiſe. Wie durch eine angehängte Nulle die ganze Zahl zehnmal gröſſer wird; ſo wird ſie gegentheils, durch eine am Ende weggenommene Null, um zehnmal geringer. Denn die Ziffern, welche Hunderter waren ſind Zehner, und die Zehner waren ſind Einer geworden. Der hundertſte Theil von 36000 iſt 360.

§. 10.

Eine jede Einheit in einer Ziffer, in welcher Klasse sie auch seyn mag, ist größer, als die ganze Reihe von Ziffern, welche ihr folgen. 2000 ist größer als 1999.

§. 11.

Eine geschriebene Zahl zu lesen.

Um eine Zahl von drey Ziffern zu lesen, spreche man erst die Hunderter, alsdann die Einer, zuletzt die Zehner aus; in allen Fällen werden die Einer vor den Zehnern gelesen. 365 heißt dreyhundert fünf und sechzig. 73 heißt drey und siebenzig.

Warum werden aber die Zahlen nicht nach der Rangordnung der Stellen gelesen, da doch die jetzt erwehnte unnatürliche Aussprache zu Schreibfehlern verführt? Warum werden die Einer nicht vorangeschrieben, und warum wird von ihnen nicht zu den höhern Ordnungen hinauf gelesen, da doch die mehresten Rechnungsarten nach dieser Ordnung verrichtet werden? Warum nennet man zehn und ein eilf, und zehn und zwey zwölf, und nicht Einzehn und Zwozehn, da es doch in der Folge Dreyzehn und vierzehn heißt? Diese Fragen mag derjenige beantworten, der das beantworten will: Warum wir die Hälfte von 14 Tagen 8 Tage nennen.

§. 12.

Um eine Zahl von vielen Ziffern zu lesen, theile man die Zahl von der rechten Hand gegen die linke durch Commata in Klassen ab, so daß jede Klasse drey Ziffern erhält, die erste Klasse linker Hand kann weniger Ziffern haben. Ueber das zweyte Comma, von der rechten Hand an gezehlt, mache man einen kleinen Strich, über das vierte zween, und über das sechste Comma

ma drey kleine Striche. Die Commata sind Nebenzeichen, die Strichlein über der Zahl, Hauptzeichen; die Hauptzeichen drücken Trillionen, Billionen, Millionen aus, wenn im ersten Falle drey, im andern zwey, im dritten ein Strichlein da ist. Ein jedes Comma wird durch Tausend ausgesprochen.

Bey dem Lesen selbst hat man dreyerley zu beobachten: 1) Man liest jede Klasse besonders, 2) die Zeichen liest man mit, und spricht sie, wie oben erwähnt ist, aus, 3) trifft aber ein Hauptzeichen und Nebenzeichen zusammen, so läßt man das Nebenzeichen aus der Acht, und liest nur das Hauptzeichen. z. E.

37,563,800,375,226,943

Sieben und dreyßigtausend fünfhundert drey und sechzig Billionen, achthunderttausend dreyhundert fünf und siebenzig Millionen, zweyhundert sechs und zwanzigtausend neunhundert drey und vierzig.

Alle Ziffern, die durch Hauptzeichen abgeschnitten sind, haben den Werth der niedrigsten Ziffer in ihrer Klasse. Das erste Hauptzeichen schneidet 6 Ziffern rechter Hand ab, die niedrigste Ziffer sind Einer, daher sind alle diese 6 Ziffern Einer. Die niedrigste Ziffer der zwoten Klasse sind Millionen, alle 6 Ziffern dieser Klasse sind daher Millionen. Z. E.

35,273,641,032,896.

Die vierte Ziffer von der rechten Hand an gezehlt, ist 2000 Einer. Die fünfte Ziffer der zwoten Klasse 70,000 Millionen.

Von den Zeichen deren man sich in der Rechenkunst bedienet.

Um sich viel kürzer fassen zu können, als es durch Worte geschehen kann; um alle Zweydeutigkeit zu vermeiden; und um die Schriften der Mathematiker lesen zu können, muß man folgende Zeichen kennen:

Zeichen der Gleichheit (=), 32 Loth = 1 Pfund, 32 Loth ist gleich 1 Pfund.

Sind mehrere Größen durch verschiedene Zeichen der Gleichheit mit einander verbunden; so ist eine jede dieser Größen einer jeden andern von diesen Größen gleich.

2 Thaler = 3 Gulden = 72 Margroschen = 48 gute Groschen.

Zeichen der Addition (+), 2 + 3 = 5, 2 und 3 sind gleich 5.

Zeichen der Subtraction (—), 6 — 4 = 2, 6 weniger 4 ist 2.

Zeichen der Multiplication (X) oder (.), 3 . 4 = 12, 3mal 4 ist gleich 12. In der Folge werde ich mir zum Zeichen der Multiplication eines Punkts bedienen.

Zeichen der Division (:), oder man schreibt die Größen als Brüche. 8 : 4 = $\frac{8}{4}$ = 2, 4 in 8 sind 2.

Zeichen der geometrischen Proportion 2 : 4 = 6 : 12, 2 verhält sich zu 4, wie 6 zu 12.

Zeichen der arithmetischen Proportion 2 — 4 = 6 — 8, 2 verhält sich zu 4, wie 6 zu 8.

Zweytes Kapitel.

Von den vier Rechnungsarten.

I. Abschnitt.

Vom Addiren.

§. 13.

Addiren ist, Zahlen von einer Art zusammenzehlen. Die Größen, welche zusammengezehlt werden sollen, heißen Posten. Die schon zusammengezehlten Posten heißt die Summe.

Eine Erklärung muß kurz, deutlich, und leicht seyn, sie muß das Wesentliche der Sache, die erklärt wird, in sich fassen. Hat eine Erklärung diese Eigenschaften, so wird sie den Beweisen, die mit ihr in Verbindung stehen, eine weit größere Klarheit und Leichtigkeit ertheilen; und sie wird auch sehr oft, in dem, was, um einen gesuchten Endzweck zu erreichen, geschehen soll, eine sichere Führerin seyn.

Um dieses zu zeigen lehret die gegebene Erklärung, daß die Einer zu den Einern und nicht zu den Zehnern; daß die Groschen zu den Groschen und nicht zu den Thalern deswegen addirt werden müssen; weil man nur Dinge von gleicher Art zusammenzehlen kann; man darf nicht Drittel zu Vierthel addiren, sondern muß die Nenner gleich machen, damit es Dinge von gleicher Art werden. Die Ganzen müssen besonders, und die Brüche besonders addirt werden, weil widrigenfalles Dinge von ungleicher Art zusammengezehlt würden.

Es können aber nur Zahlen von einer Art in eine Summe gebracht werden, das Gegentheil ist eine

wahre Unmöglichkeit. Die Summe von 2 und 2 ist 4, aber 2 Pferde und 2 Schaafe zusammen genommen, machen weder 4 Schaafe noch 4 Pferde aus. Gießt man 3 Maaß Wein und 2 Maaß Wasser zusammen, so erhält man 5 Maaß, aber diese Summe ist weder Wein noch Wasser. Giebt man aber Dingen von verschiedener Art einen Namen, der allen Posten zukömmt; so macht man sie dadurch zu Dingen von einer Art, und alsdann können sie zusammen addirt werden. 2 Pferde und 2 Schaafe sind 4 Stück Vieh; 3 Maaß Wein und 2 Maaß Wasser sind 5 Maaß Getränk.

Daß obige Erklärung der Addition völlig angemessen sey, ergiebt folgendes. Denn sollen verschiedene Zahlen nur Eine Zahl ausmachen, so müssen sie um die Summe oder die Sammlung aller Theile zu erhalten, zusammengezehlt werden. Ein jeder Posten aber ist ein Theil der Summe, weil alle Posten die ganze Summe ausmachen.

§. 14.

Verschiedene Zahlen zu addiren.

Man schreibe die gegebenen Zahlen also unter einander, daß die Einer unter den Einern, die Zehner unter den Zehnern stehen. Alsdenn zehle man erst die Einer, nachher die Zehner u. s. w. zusammen. Wenn die Summe der Einer aus zwo Ziffern besteht, so schreibe man die Einer und Zehner der Summe unter den Einern und Zehnern der Posten. Die Summe aus den Zehnern der Posten wird unter den Zehnern und Hundertern der Posten geschrieben u. s. w. Hierdurch erhält man neue Posten. Die Summe dieser Posten ist die Summe aller gegebenen Zahlen. Folgendes

gendes Exempel wird die Addition deutlicher machen, als es Worte vermögen.

Beweis.

Der Beweis bietet sich einem Jeden selbst dar. Eine jede Größe besteht aus allen ihren Theilen. Da nun alle Theile aller Posten nach ihrem wahren Werthe zusammen gezehlt sind; so hat man alle Posten zusammengezehlt, das ist, man hat sie addirt.

	871
	1246
	31
	9253
	9
	21
	12
	10
Summe	11419

§. 15.

Der jetzt gezeigten Art des Addirens bedienet man sich nie, sie ist zu weitläuftig, und erfodert zu viel Platz. Um aber deutlich zu zeigen, in welcher Ordnung die einzelnen Summen geschrieben werden müssen, war ein Exempel nothwendig. Es gehöret wenig dazu, die Ziffer der höchsten Ordnung, in den einzelnen Summen im Sinne zu behalten, und sie zur folgenden Klasse hinzuzuthun; und nur immer die Ziffer der niedrigsten Ordnung unter der Linie zur Hauptsumme zu setzen.

Die Summe aus den Einern ist 12, das ist 2 Einer und 1 Zehner, die 2 erhält ihren Platz unter der Linie, den einen Zehner addirt man zu den Zehnern; die Summe aus den Zehnern beträgt mit der hinzugefügten 1, 23, welches 3 Zehner und 2 Hunderter sind. Die 2 Hunderter zu den Hundertern gethan und die Summe gemacht, giebt 10 Hunderter, das ist, 1 Tausender und 0 Hunderter, diesen Tausender mit den Tausendern zusammengezehlt, giebt

	83392
	256
	3264
	100
	20
Summe	87032

7 Tau-

7 Tausender; zuletzt schreibt man auch die 8 zur Hauptsumme

35997	2000
10024	97635
532	247
64	3600
Summe 46617	Summe 103482

§. 16.

Wären viele Posten zu addiren, und die Summe aus den Einern oder einer höhern Ordnung bestünde aus 3 Ziffern aus 143, so schriebe man nur die 3 unter der Linie und fügte der folgenden höhern Klasse 14 bey. In diesem Falle wäre es am bequemsten das Exempel in 3 oder mehrere Theile zu zerschneiden, und die aus diesen Theilen gefundene Summen wiederum zu addiren.

Ob man die Ziffern der Posten von unten hinauf, oder von oben herunter, oder in einer andern Ordnung zusammenzehlt, das ist gleichgültig.

§. 17.

Von den Vortheilen, welche bey der Addition anzuwenden sind.

Weil es gleichgültig ist, in welcher Ordnung man addirt, wenn nur die Ziffern nach der Decimalordnung zusammengezehlt werden, das ist, wenn man nur die Ziffern verschiedener Ordnungen nicht mit einander, vermischet, so kann man sich im Zusammenzehlen die Arbeit erleichtern.

1) Wenn eine Ziffer verschiedenemal zerstreut in einer Ordnung vorkömmt, so kann man sie durch die Multiplication so gleich in eine Summe bringen, z. E. wenn 6 Achten in der Reihe der Einer

sich

sich befänden, so wäre ihre Summe 48, weil 6 mal 8, 48 sind. Die Summe von 7 Neunen wäre 63. Im Zusammenzehlen der übrigen Ziffern übergehe man im ersten Falle alle Achten, im andern alle Neunen.

2) Weil es sehr leicht ist zehn zu einer Zahl zu addiren, da 35 und 10 = 45, 47 und 10 = 57 sind; so kann man sich gewöhnen durch einen Blick ein paar Ziffern zusammenzunehmen, deren Summe 10 macht z. E. 3 und 7, 4 und 6, 2 und 8, 5 und 5, 9 und 1, diese Ziffern aber müssen, um eine Verwirrung zu vermeiden, nicht zu weit von einander stehen.

3) Sollen die Ziffern 8 oder 9 zu einer Zahl addirt werden, so addire man statt dessen 10, und subtrahire im ersten Falle 2, im andern 1 von der Summe.

4) Es ist leichter eine kleinere Zahl zu einer grössern, als eine größere Zahl zu einer kleinern zu zehlen. Soll man zu 32, 6 zehlen, so nenne man die 32, 36, und zehle 2 dazu; soll zu 41, 7 gezehlt werden, so darf man nur zu 47, 1 zehlen. Doch die Uebung giebt hierinne den besten Unterricht, und man wird bald durch einige Uebung die Summe von ein paar Ziffern, ohne Zusammenzehlen, auswendig wissen.

II. Abschnitt.

Vom Subtrahiren.

§. 18.

Subtrahiren ist Zahlen von gleicher Art von einander abziehen; oder den Unterschied zwischen zwo Zahlen von gleicher Art angeben. Dasjenige, was durch die Subtraction gefunden wird, heißt der **Rest** oder die **Differenz**.

Eine

Eine Zahl von einer andern abziehen oder den Unterschied zwischen diesen beiden Zahlen angeben, ist im Grunde einerley. Wenn von 6 Ellen Leinwand 4 Ellen weggenommen oder subtrahirt werden, so bleibt ein Rest von 2 Ellen über. Dieser Rest ist das Gesuchte. Der Unterschied zwischen 6 und 4 Ellen ist ebenfalls 2 Ellen. Dieser Unterschied, daß 4 nicht 6 sind, ist die gesuchte Differenz.

§. 19.

Daß aber nur Dinge von gleicher Art von einander subtrahirt werden können, wird einem jeden leicht in die Augen fallen. Von 5 Aepfeln kann ich 4 Aepfel wegnehmen und der Rest bleibt 1 Apfel. Der Unterschied, daß 4 Aepfel nicht 5 Aepfel sind, ist ebenfalls 1 Apfel. Kann ich aber 4 Ochsen von 5 Aepfeln wegnehmen, und bleibt alsdenn der Rest 1 Apfel? Oder ist der Unterschied, daß 4 Ochsen nicht 5 Aepfel sind, 1 Apfel?

§. 20.

Alle unbenamten Zahlen aber kann man als Dinge von einer Art ansehen. Denn haben gegebene Zahlen keinen Namen, so können sie alle mögliche Dinge vorstellen; folglich auch Dinge von gleicher Art.

§. 21.

Eine kleinere Zahl von einer größern zu subtrahiren.

1) Man schreibe die kleinere Zahl also unter die größere, daß die Ziffern von einer Ordnung unter einander stehen.

2) Sind die Ziffern, welche abgezogen werden sollen, kleiner als die darüber stehenden, so verrichte man

den

den Abzug, und ſetze den Reſt unter der Linie. Die Arbeit aber fängt man von der niedrigſten Ordnung rechter Hand an, und fährt damit bis zur höchſten Ordnung linker Hand fort.

3) Iſt aber diejenige Ziffer, welche abgezogen werden ſoll größer, als die darüber ſtehende; ſo borge man eine Einheit von der nächſt höhern Ordnung der obern Reihe. Dieſe Einheit iſt vermöge der Decimalordnung 10 in der um einen Grad niedrigern Klaſſe. Die geborgte 10 addire man zu der obern Zahl, die zu klein war, ſo kann der Abzug geſchehen. Ueber die Ziffer, aus welcher die Einheit geborgt iſt, mache man einen Punkt, welcher anzeigt, daß eine Einheit weggeborgt ſey, ſie gilt alſo eins weniger, als ihr Name ſagt. Weil aber Subtrahiren iſt, Dinge von gleicher Art von einander abziehen, ſo werden immer Einer von Einern, und Zehner von Zehnern gezogen.

	. . .
3 Einer von 4 Einern genommen,	375824
bleibt 1 Einer, 0 oder nichts, von 2	296903
bleibt 2, 9 können von 8 nicht genommen werden, ich borge alſo 1 aus	Reſt 78921

der 5; dieſe geborgte 1 iſt 10 in der Klaſſe von welcher die 9 abgezogen werden ſollte, dieſe 10 und die obere 8 ſind 18. 9 von 18 bleibt 9, 6 von 4 kann ich nicht nehmen, ich borge alſo Eins aus der obern 7. Dieſe 1, welche 10 in der nächſt niedrigern Klaſſe iſt, addire ich zu der 4, und ſage 6 von 14 bleibt 8, 9 von 16 bleibt 7, 2 von 2 bleibt nichts.

. . .	. .	.
87530	5342	7285
961	261	300
Reſt 86569	Reſt 5081	Reſt 6985

Beweis

Beweis.

Weil alle Theile der kleinern Zahl nach der Decimalordnung von der größern abgezogen sind, und eine Größe aus allen ihren Theilen besteht, so ist die kleinere Zahl von der größern subtrahirt.

§. 22.

Soll man von einer Nulle borgen, so borget man über die Nulle weg von der ersten Ziffer, welche dadurch um 1 geringer wird, und die 0 wird 9.

403	502	70
285	109	61
Rest 118	Rest 393	Rest 9

§. 23.

Wenn sich mehrere Nullen in der größern Zahl bey einander befinden, so wird die erste Nulle, welche Abzug leiden soll 10, alle darauf folgenden Nullen werden 9, und die erste geltende Ziffer wird 1 weniger als ihr Name anzeigt.

30000	5003000
8	14036
Rest 29992	Rest 4988964

Wie aber kömmt es, daß folgende Nullen Neunen werden, wenn von der ersten 1 weggeborgt ist; und warum gilt die erste geltende Ziffer 1 weniger als ihr Name sagt? Der hier folgende Beweis fasset die Antwort in sich.

Beweis.

Beweis.

Die Stelle der Einer soll 8 hergeben, sie hat aber nur 3, sie will daher aus der zwoten Stelle borgen, diese aber hat nichts, dieß zeigt die Nulle; die zwote Stelle wendet sich zur dritten, die dritte zur vierten Stelle, in allen diesen Stellen aber sind Nullen. Die vierte Stelle findet in der fünften die Ziffer 7, aus dieser borget sie 1. Es bleiben also in der fünften Stelle noch 6, eine 1 in der fünften Stelle aber ist 10, in der vierten von dieser 10 verleihet sie 1 in die dritte, sie behält also noch 9. So empfängt eine jede Nulle aus der nächst höhern Ordnung 10, und giebt an die nächst niedrigere Ordnung 1 wieder weg. Daher ist eine jede der unmittelbar bey einander stehenden Nullen 9. Die niedrigste aber behält die empfangene 10, wenn sie nicht, wie im beygesetzten Exempel geschehen, 1 wieder weggelie-

....	
70003	
8	
Rest 69995	

hen hat.

Der Hauptnutzen eines Beweises in der Arithmetik besteht nicht darinnen, daß er die Richtigkeit einer Sache beweist; dieß würde eine Hand voll Rechenpfennige in vielen Fällen ebenfalls verrichten: sondern darinnen, daß er die Gründe zeigt, warum das Erwiesene nothwendig so und nicht anders erfolgen müsse; er deckt den Grund eines Verfahrens auf, und man lernet durch ihn, das Erwiesene recht verstehen.

§. 24.

Eine gleiche Addition und eine gleiche Subtraction hebt einander auf. Das ist: wenn ich zu einer Zahl eine andere hinzuthue oder addire, und nehme die hinzugethane Zahl durch Subtraction wieder weg, so erfolgt die erste Zahl wieder. Wenn ich von einer Zahl eine

andere subtrahire oder wegnehme, und gebe dem übergebliebenen Reste das Weggenommene durch Addition wieder, so erscheint ebenfalls die erste Zahl.

§. 25.

Hieraus fließt die Probe der Addition und der Subtraction. Um zu probiren, ob man recht addirt habe, subtrahire man alle Posten nach einander von der Summe; hat man ohne Fehler gerechnet, so erfolgt am Ende 0. Denn durch die Addition hat man alle Posten in eine Summe zusammengetragen; durch die gleiche Subtraction trägt man einen Posten nach dem andern wieder weg.

31754
200
9653
Summe 41607

31754
9853
200
9653
9653
0

Die Probe der Subtraction ist: daß die größere Zahl wieder erscheinen muß, wenn der Rest mit der kleinern Zahl wieder zusammenaddirt wird. Denn durch die Subtraction hat man der größern Zahl die kleinere genommen, giebt man nun dem überbliebenen Reste, die genommene kleinere Zahl durch Addition wieder, so muß sich nothwendig die größere wieder zeigen.

7650039

```
      .....
      7650039
       783148
    ---------
Rest  6866891
       783148
    ---------
Summe 7650039
```

Die angezeigte Probe der Addition ist in der Ausübung zu weitläuftig. Die beste Probe ist, daß man von oben herunter addire, wenn man das erstemal von unten hinauf addirt hat. Kömmt beidemal dieselbe Summe, so hat man keinen Fehler zu befürchten. Die gegebene Probe der Subtraction hingegen, muß man bey jedem Exempel machen, denn es erfodert wenig Zeit und Mühe, zwo Reihen zu addiren.

Die Vortheile, welche bey der Subtraction anzubringen sind, sind wenig bedeutend. Dieß einzige möchte etwas seyn. Wenn man borget, so ziehe man lieber die Ziffer, welche abgezogen werden sollte, von 10 ab, und addire die Ziffer, von welcher der Abzug geschehen sollte, und nicht geschehen konnte, hinzu. Weil in diesem Falle immer von einer unveränderlichen Zahl, nämlich von 10 sehr bald mechanisch. 14 8 von

```
 8
---
 6
```

10 ist 2, hierzu 4 ist 6.

Noch ein paar Exempel der Subtraction zur Uebung.

```
      .....          .....
   60008005 2003     3002833003
   1758732 64024      4600026
  ----------------  ----------
Rest 4242067 87979  Rest 2998232977
```

III. Abschnitt.

Vom Multipliciren.

§. 26.

Eine gegebene Zahl durch die andere **multipliciren** ist: **eine gegebene Zahl so oft nehmen, als die andere sagt;** das ist: als die andere Einheiten in sich fasset. Diejenige Zahl, welche einigemal genommen werden soll, heißt **Multiplicandus.** Die Zahl, welche sagt, wie oft sie genommen werden soll, heißt **Multiplicator.** Die Zahl, welche durch die Multiplication gefunden wird, heißt das **Produkt.** Der gemeinschaftliche Name aller Zahlen, die sich multipliciren, ist **Factoren.**

6 soll durch 4 multiplicirt werden, heißt: man soll die 6 4mal oder die 4 6mal nehmen, oder zusammensetzen. 4 ist hie der Multiplicator, 6 der Multiplicandus, oder umgekehrt, 24 das Produkt, 4 und 6 sind Factoren.

§. 27.

Das Produkt findet man, entweder durch die Addition, wenn man den Multiplicandus so oft zusammenaddirt, als der Multiplicator Einheiten hat. 4mal 6 wäre, wenn 6 4mal zusammengezehlt würde, oder durch die Multiplication, wenn man die 6 auf einmal 4mal nimmt. Auch bey Zahlen, die aus mehr Ziffern bestehen, könnte man den Multiplicandus so oft unter einander schreiben, als der Multiplicator Einheiten hat, und alsdenn die Posten zusammenaddiren, die Summe würde das richtige Produkt seyn z. E. 231 soll durch 3 multiplicirt werden.

231
231
231
Produkt 693

Allein

Allein dieß Verfahren ist, besonders wenn der Multiplicator groß ist, viel zu weitläuftig, folgender Satz zeigt einen weit kürzern und leichtern Weg.

§. 28.

Wenn verschiedene Größen addirt werden sollen, und man multiplicirt die Summe dieser Größen durch eine gegebene Zahl; so erfolgt dasselbe Produkt, als wenn man jede Größe besonders durch die gegebene Zahl multiplicirt, und die erhaltenen Produkte addirt. z. E.

Die Summe von 2 und 3 und 4 ist 9. Es giebt aber einerley, ob man die ganze 9 durch 2 multiplicirt, oder ob man die 2, die 3, die 4 jede besonders durch 2 multiplicirt, und die drey Produkte addirt. In beyden Fällen erfolgt 18.

Beweis.

Die Theile 2, 3, 4, machen die ganze Größe 9 aus, nun ist es gleichgültig, ob man diese Theile, jede besonders multiplicirt, oder ob man sie auf einmal in der Zahl 9 multiplicirt.

Die Ziffern einer jeden Zahl aber sind durch die Addition mit einander verbunden. 243 heißt 3 Einer und 4 Zehner und 2 Hunderter. Um nun diese Zahl durch 5 zu multipliciren, multiplicire man, vermöge des eben erwähnten Satzes, jeden Theil der Zahl durch 5, und addire die Produkte nach dem wahren Werthe, welchen die Decimalordnung bestimmet.

243	243
5	5
15	Produkt 1215
20	
10	
Produkt 1215	

Der obige Satz gilt auch, wenn eine Größe aus Theilen besteht, die nicht von einer Art sind. Aus Thalern, Groschen und Pfennigen; aus Zentnern, Pfunden, Lothen, Quenten. Z. E. Die Theile einer Größe mögen 16 Thaler 5 Groschen 3 Pfennige seyn. Die ganze Größe soll durch 4 multiplicirt werden. Um dieses zu leisten, könnte man die ganze Größe, durch Multipliciren in Pfennige verwandeln, und die gefundene Summe aller Theile nämlich 4651 Pfennige durch 4 multipliciren. Das Produkt würde 18640 Pfennige seyn. Rechnete man weiter aus, wie viel Thaler und Groschen dieses Produkt der Pfennige ausmacht, so würde man endlich in 64 rthl. 21 gr. 4 pf. das gesuchte Produkt erhalten.

Obiger Satz aber sagt: daß es um den gesuchten Zweck zu erhalten, dieser Weitläuftigkeit gar nicht bedürfe; man könne nur alle Theile der gegebenen Größe durch 4 multipliciren, um den gesuchten Zweck ohne Umwege zu erreichen.

	16 rthl.	5 gr.	3 pf.
			4
Produkt	64 rthl.	20 gr.	12 pf.

§. 29.

Man hat eine Tafel verfertigt, in welcher alle Produkte der einzelnen Ziffern von 1 bis 9 enthalten sind. Diese Tafel heißt das Einmalein. Es ist bey der Multiplication und Division nothwendig das Einmalein auswendig zu lernen, oder es so lange vor sich zu legen, bis man es durch den Gebrauch beym Multipliciren, auswendig weis.

Tafel.

Tafel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 30.

Eine zusammengesetzte Zahl durch eine Zahl von einer Ziffer zu multipliciren.

Man schreibe den Multiplicator unter die Einer des Multiplicandus, und multiplicire zuerst die Einer, dann die Zehner, weiter die Hunderter und so fort. Man schreibe aber nur immer die Ziffer der niedrigsten Ordnung unter der Linie, die Ziffer der höhern Ordnung addire man zum Produkte der folgenden Klasse. 372 soll durch 5 multiplicirt werden.

2 mal 5 ist 10, 0 hingeschrieben, und 1 im Sinne behalten,
5 mal 7 ist 35, hierzu die im Sinne behaltene 1 addirt macht 36, 6 hingeschrieben und 3 im Sinne, 3 mal 5 ist 15, die im Sinne behaltene 3 hinzugethan macht 18, welche Zahl ganz hingeschrieben wird.

	372
	5
Prod.	1860

§. 31.

Wie es beym Addiren gleichgültig ist, in welcher Ordnung man die Posten zusammenzehlt, so ist es auch

bey der Multiplication gleichgültig, in welcher Ordnung man gegebene Factoren durch einander multiplicirt. 2 mal 4 ist so viel als 4 mal 2, folglich kann man zum Multiplicator machen welchen Factoren man will.

Die Factoren 2, 4, 3, 5 sollen durch einander multiplicirt werden, das ist, 2 soll durch 4, das Produkt 8 durch 3, dieß Produkt 24 durch 5 multiplicirt werden, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die Multiplication verrichtet wird. Man mag die Factoren versetzen wie man will, so ist immer das letzte Produkt 120.

§. 32.

Zahlen von mehreren Ziffern durcheinander zu multipliciren.

Den Multiplicator schreibe man unter die niedrigsten Ziffern des Multiplicandus. Alsdann multiplicire man zuerst, wie gezeigt ist, durch die Einer, nachher durch die Zehner, Hunderter u. s. w. des Multiplicators, alle Ziffern des Multiplicandus. Die Produkte aus den Einern, Zehnern, Hundertern des Multiplicators fange man unter den Einern, Zehnern, Hundertern, zu schreiben an. Die Summe dieser verschiedenen Reihen ist das Produkt.

Soll man finden, wie viel Tage 5004 Jahr, und wie viel Groschen 2632 Thaler sind; so multiplicire man die gegebenen Jahre, durch die Tage eines Jahrs, und die gegebenen Thaler durch die Groschen eines Thalers. Die Produkte geben das Gesuchte. Denn man nimmt die Tage eines Jahrs so oft, als die Anzahl der gegebenen Jahre ist, und die Groschen eines Thalers so oft, als die Anzahl der gegebenen Thaler ist. Folglich erhält man durch die erste Aufgabe die gesuchten Tage, durch die zwote die gesuchten Groschen.

5004 Jahr

5004 Jahr	2632 Thaler
365 Tage	36 Groschen
25020	15792
30024	7896
15012	Prod. 94752
Prod. 1826460 Tage	

Beweis.

Man nimmt im ersten Exempel erstlich alle Theile des Multiplicandus 5 mal, nachher 60 mal, zuletzt 300 mal, folglich hat man alle Theile des Multiplicandus, das ist, den ganzen Multiplicandus 365 mal genommen, oder durch 365 multiplicirt.

§. 33.

Von den Vortheilen die bey der Multiplication anzuwenden sind.

1) Soll eine Zahl durch eine Zahl die aus 1 und ein oder etlichen daran gehenkten Nullen besteht, als 10, 100, multiplicirt werden; so ist das Produkt gefunden, wenn die Nullen des Multiplicators den Multiplicandus angehangen werden. Wie schon bey der Decimalordnung erwehnt ist.

2) Finden sich im Multiplicator Nullen, so hat man nicht nöthig ganze Reihen Nullen hinzuschreiben, sondern man schreibt nur für jede Nulle eine 0 in ihre gehörige Stelle. Damit dadurch das Produkt der geltenden Ziffern ihren rechten Platz erhalten mögen.

432196
400302

864392
12965880
172878400

Produkt 173008923192

3) Finden sich am Ende des Multiplicators oder des Multiplicandus, oder am Ende beider Factoren Nullen; so multiplicire man nur blos die geltenden Ziffern; und hänge dem Producte so viele Nullen an, als beide Factoren am Ende Nullen haben.

437	123000	74000
2600	42	300
2622	246	Prod. 22200000
874	492	
Prod. 1136200	Pr. 5166000	

4) Weil die Multiplication durch 1 dieselben Ziffern im Produkte giebt, die der Multiplicandus hat; so kann man, wenn der Multiplicator am Ende oder vorne eine 1 hat, den Multiplicandus als das Produkt nehmen, welches durch die 1 entstanden wäre, und nur durch die übrigen Ziffern multipliciren. Stehen die multiplicirenden Ziffern vor der 1, so schreibt man ihr Produkt um eine Stelle vorwärts, stehen sie hinter der 1, so schreibt man ihr Produkt um eine Stelle rückwärts. Den Multiplicator schreibt man hinter den Multiplicandus und sondert ihn durch einen Strich ab. Weil dieser Fall sehr oft vorfällt, und immer eine Reihe Ziffern durch diese Verkürzung erspart wird, so thut man wohl sich solche durch Uebung geläufig zu machen.

3928 |.21	76532 |.14	352|261
7856	306128	2112
Pr. 82488	Pr. 1071448	704
		Pr. 91872

5) Wenn einer der Factoren, einer Rangzahl 10, 100, 1000, so nahe ist, daß höchstens nur 9 Einer fehlen, so multiplicire man den andern Factor mit der Rangzahl, das ist, man hänge den Factor so viele Nullen an, als die Rangzahl Nullen hat. Von diesem Produkte subtrahire man das Produkt, welches aus der Differenz zwischen dem einen Factor, und der Rangzahl erwachsen ist. Z. E. 39875 soll durch 996 multiplicirt werden.

Hängt man den Multiplicandus 3 Nullen an, so ist er durch 1000 multiplicirt, da er nur durch 1000 weniger 4 multiplicirt werden sollte. In dem Produkte 39875000 ist der Multiplicandus also 4 mal öfterer enthalten, als seyn sollte. Man multiplicire daher 39875 durch 4, und subtrahire das Produkt von 39875000, so erhält man im Reste das wahre Produkt.

	39875000	39875
subtr.	159500	4
Prod.	39715500	159500

Noch ein Exempel.

36 soll durch 994 multiplicirt werden. Die Differenz zwischen 994 und 1000 ist 6.

	3600.0	36
	216	6
Prod.	35784	216

§. 34.

Benamte Zahlen können nicht durch benamte Zahlen, sie mögen gleichartig oder ungleichartig seyn, multiplicirt werden. Bey dem Ausdrucke 4 Thaler durch 5 Groschen multipliciren, oder 4 Thaler 5 Groschen mal nehmen, kann man so wenig etwas gedenken, als man bey dem Ausdrucke 4 Thaler 5 Thaler mal nehmen etwas gedenken kann. Zwar haben oft beide Factoren einen Namen, allein einen derselben muß man immer als namloß ansehen. Wenn ein Mann jeden Tag 2 Thaler bekäme, so würde sich die jährliche Einnahme ergeben, wenn man 365 Tage durch 2 Thaler multiplicirte. Aber dies heißt nichts anders, als die 2 Thaler so oft nehmen, als Tage im Jahre sind. Hätte dieser Mann jede Stunde 2 Thaler Einnahme, so würden 365 Stunden dasselbe Kapital geben. Man sieht hieraus, daß der Name des einen Factors gar keinen Einfluß in die Rechnung habe, wohl aber der Name des andern. Denn man gebe dem Manne jeden Tag 2 Groschen, so würde seine jährliche Einnahme 730 Groschen betragen, da es zuvor so viele Thaler waren. Es kömmt also bey der Multiplication nicht in Betracht, ob die Factoren Dinge von gleicher, oder ungleicher Art sind. Man kann daher die Hunderter einer Zahl, durch die Einer einer andern Zahl, Thaler durch Groschen, Brüche durch ganze Zahlen multiplicieren; aber zu einander addiren oder von einander abziehen kann man sie nicht.

§. 35.

Wenn zwo Zahlen durch einander multiplicirt sind, so fasset das Produkt den einen Factor so oft in sich als der andere Factor 1 in sich fasset. 3 mal 4 ist 12, 4 steckt so oft in 12 als 1 in 3 steckt, und 3 steckt so oft in 12 als 1 in 4 steckt.

Beweis.

Beweis.

Das Produkt ist dadurch erwachsen, daß man alle Theile des einen Factors so oft genommen hat, als alle Theile des andern Factors, Einheiten in sich fassen.

§. 36.

Es ist gleichgültig, ob man das ganze Produkt, welches durch die Multiplication verschiedener Factoren erwachsen ist, durch eine gegebene Zahl multiplicirt; oder ob man irgend einen dieser Factoren erst durch die gegebene Zahl multiplicirt, und alsdenn das Produkt macht. In beiden Fällen erfolgt einerley.

Z. E. das Produkt der Factoren 2 3 4 ist 24, dieses Produkt soll durch 5 multiplicirt werden, und man erhält 120. Man hätte eben dieß Produkt erhalten, wenn man einen der Factoren etwan 2 durch 5 multiplicirt, und statt 2 durch 10 die Multiplication verrichtet hätte. Denn der multiplicirte Factor theilt seinen erhöheten Werth allen andern Factoren mit.

Sollen daher, wie es bey der Kettenregel oft geschieht, verschiedene Factoren durch einander multiplicirt werden; so kann man sich sehr oft die Arbeit vermindern, wenn man von zweenen Factoren Ein Produkt macht, und durch dieß Produkt multiplicirt. Z. E.

Die Factoren mögen seyn 2 3 654 5 3. Wenn diese Factoren in der Ordnung, wie sie stehen, multiplicirt werden, so wird man mehr Arbeit haben, als wenn man 654 gleich durch 9 multiplicirt, weil 3 mal 3 9 sind, und an dem Produkte 5886 nur eine Nulle hängt, weil 2 mal 5 10 ist.

IV. Abschnitt.

Vom Dividiren.

§. 37.

Dividiren ist eine gegebene Zahl in gegebene gleiche Theile theilen, und die Größe eines Theils angeben; oder auch bestimmen, wie oft eine gegebene Zahl in einer andern gegebenen Zahl enthalten ist.

§. 38.

Diejenige Zahl, welche getheilt werden soll, heißt der **Dividendus**, die Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile sie getheilt werden soll, der **Divisor**, und der gefundene Theil heißt der **Quotient**. 6 soll durch 3 dividirt werden, so ist 6 der Dividendus, 3 der Divisor, und weil 3 zweymal in 6 steckt, so ist 2 der gesuchte Quotient.

Es ist aber gleich, ob man eine Zahl in gegebene gleiche Theile theilt, und die Größe eines Theils angiebt, oder ob man bestimmt, wie oft eine Zahl in der andern enthalten ist; beides giebt einen und denselben Quotienten. Denn theilt man die Zahl 6 in 3 gleiche Theile, so ist die Größe eines dieser Theile 2. Diese 2 ist der Quotient. Im andern Falle ist in der 6 die 3 zweymal enthalten, auch hier zeigt sich derselbe Quotient 2.

Ob nun gleich beide Erklärungen einerley sagen, so ist doch keine von beiden überflüßig, denn die eine Erklärung giebt hier, die andere dort mehr Licht.

Nach der ersten Erklärung ist der Divisor immer, wie ein jeder sieht, eine unbenamte Zahl. Nach der andern immer eine benamte Zahl, die von derselben Art,

Art, als der Dividendus ist. Z. E. Wie oft stecken 3 Ellen Leinwand in 12 Ellen? 4 mal. Man kann nicht sagen, wie oft stecken 3 Zitronen, oder eine namlose 3 in 4 Ellen. Es kann also der Divisor benamt, und auch unbenamt seyn.

§. 39.

Diejenige Erklärung, welche sagt: Dividiren sey finden, wie oft eine Größe in der andern steckt, trifft nur alsdenn genau, wenn eine Zahl durch eine andere Zahl dividirt wird, die nicht größer, als sie selbst ist. Eine kleinere Zahl steckt freylich ganz in der größern; und theilt man die größere in so viele gleiche Theile als die kleinere Einheiten enthält, so ist eins dieser Theile zum wenigsten eine ganze Einheit.

Soll aber eine Zahl durch eine andere Zahl, welche größer, als sie selbst ist, dividirt werden; so kann diese in jener nicht ganz enthalten seyn. Zwo Ellen Band können unmöglich drey Ellen von demselben Bande in sich enthalten; und theilt man zwo Ellen in drey gleiche Theile, so kann eins von diesen Theilen, keine ganze Elle seyn. In dem Falle also, wenn eine kleinere Zahl, durch eine größere dividirt werden soll, ist dividiren, finden, ein wie großer Theil von einer größern Zahl in einer kleinern enthalten ist.

Den gesuchten Quotienten findet man, wenn man den größern Divisor unter den kleinern Dividendus schreibt, und beide Größen durch einen Strich von einander absondert. Ein solcher Ausdruck heißt ein Bruch. Die Zahl über dem Striche nennet man den Zehler, die Zahl unter dem Striche den Nenner.

§. 40.

Ein Bruch ist also wenn eine kleinere Zahl durch eine größere dividirt ist. Z. E. 4 Personen sollen sich

in 3 Himten Waizen gleich theilen; wie viel bekömmt jede Person? Oder welches einerley ist: 3 Himten sollen durch 4 dividirt werden; wie groß ist der Quotient? Die Antwort ist $\frac{3}{4}$ Himten, oder Dreyvierthel Himten. 21 Personen sollen 14 Thaler unter sich gleich theilen; wie viel bekömmt eine jede Person? Antwort $\frac{14}{21}$ Thaler oder Einen Gulden. Wie groß ist der Quotient, wenn 5 durch 7 dividirt wird? Antwort $\frac{5}{7}$ Fünfsiebenthel.

Hieraus sieht man den Ursprung der Brüche. Dieß wenige habe ich schon deswegen hier von den Brüchen sagen müssen, weil es die Ordnung foderte. Die weitere Ausführung findet man in dem Kapitel von den Brüchen.

§. 41.

Alles was mit Zahlen um einen gesuchten Endzweck zu erreichen vorgenommen werden kann, besteht darinne, daß man sie vermehrt, oder vermindert. Die Vermehrung geschieht durch Addiren oder Multiplici-ren; die Verminderung durch Subtrahiren oder Dividiren.

§. 42.

Wie man aber durch eine wiederholte Addition dasjenige leisten kann, was die Multiplication fodert; (§. 27.) so kann man auch durch wiederholtes Subtrahiren das leisten, was die Division fodert.

Man soll 365 durch 98 dividiren, das ist, man soll finden, wie oft 98 in 365 steckt. So oft man den Divisor von dem Dividendus abziehen kann, so oft steckt er gewiß ganz in demselben: bleibt am Ende etwas übrig, das kleiner als der Divisor ist, so ist dieß überbliebene der Zehler von einem Bruche, dessen Nenner der Divisor ist. Der durch Subtraction gefundene Quotient der Aufgabe

3·6·5
98
2·6·7
98
1·6 9
98
71
$3\frac{71}{98}$

gabe ist $3\frac{71}{98}$. Dieser zuweitläuftigen Methode aber bedienet man sich nie. Das hier folgende zeigt uns einen nähern Weg.

Multipliciren und Dividiren ist einander so entgegengesetzt, wie Addiren und Subtrahiren einander entgegengesetzt ist; eins vernichtet das andere, hieraus folgt der Satz:

§. 43.

Eine gleiche Division und eine gleiche Multiplication hebt einander auf. Das ist: wenn man eine Zahl durch eine andere dividirt, und den gefundenen Quotienten durch den Divisor wieder multiplicirt, so zeigt sich der Dividendus. 8 durch 4 dividirt, giebt den Quotienten 2, diese 2 durch 4 multiplicirt, giebt im Produkte obige 8 wieder. Ist hingegen eine Zahl durch die andere multiplicirt, und man dividirt das Produkt durch einen der Factoren, so erscheint im Quotienten der andere Factor. 3 durch 2 multiplicirt, giebt das Produkt 6, diese 6 durch 3 giebt 2, durch 2 dividirt giebt 3. Es ist also die Division die Probe der Multiplication und die Multiplication die Probe der Division.

Beweis.

Durch die Multiplication wird eine Zahl so oft zusammen genommen als der Multiplicator Einheiten hat, durch eine gleiche Division, wird das zusammengehäufte Produkt wieder in eben so viele gleiche Theile getheilt. Wenn man hingegen eine Zahl durch die andere dividirt, so theilt man sie in so viel gleiche Theile, als der Divisor Einheiten hat, und nimmt im Quotienten einen dieser Theile davon; durch die Multiplication mit demselben Divisor, wird dieser Theil eben so oft wieder zusammen genommen, als er durch eine gleiche Theilung abgesondert war.

§. 44.

Wenn eine Größe aus Theilen besteht, welche durch die Addition mit einander verbunden sind, und man dividirt einen jeden Theil mit einer gegebenen Zahl, und addirt die gefundenen Quotienten; so bekömmt dasselbe, als wenn man die ganze Größe auf einmal durch die gegebene Zahl dividirt. Z. E.

Die Größe 12 besteht aus den Theilen 2 und 4, und 4 und 2. Dividirt man einen jeden Theil durch 2, so erhält man die Quotienten 1 und 2 und 2 und 1. Die Summe hiervon ist 6. Dividirt man auf einmal die ganze 12 durch 2, so erhält man im Quotienten dieselbe 6. Denn in der Größe 12 sind die Theile 2, 4, 4, 2, ganz enthalten. Ob man nun jeden Theil besonders, oder ob man alle Theile auf einmal in der Zahl 12 dividirt, das ist gleichgültig.

§. 45.

Eine jede Zahl aber, die aus mehr als einer Ziffer besteht, kann man als eine Summe von Einern ansehen; man kann sie aber auch ansehen, insoferne sie aus Theilen besteht, welche durch die Addition mit einander verbunden sind. Z. E. die Zahl 342 ist eine Summe von dreyhundert zwey und vierzig Einern; sie besteht aber auch aus 3 Hundertern, 4 Zehnern und 2 Einern.

Sollte man die Zahl 342 durch 4 dividiren, und man wollte die Zahl als eine Summe von Einern ansehen; so müßte man zu finden sich bemühen, wie oft 4 in 342 enthalten sey; oder man müßte die 4 so oft subtrahiren, als möglich wäre. Das erste würde zu schwer, das andere zu weitläuftig seyn. Nach (§. 44.) sind diese Schwierigkeiten gehoben, wenn man alle Theile des Dividendus durch 4 dividirt, wodurch der Quotient aus der ganzen Zahl erhalten wird.

§. 46.

§. 46.

Um eine Zahl durch die andere zu dividiren, gebraucht man drey Rechnungsarten, das Dividiren, das Multipliciren und das Subtrahiren. Durchs Dividiren findet man wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist; um zu probiren, ob er genau darinnen enthalten ist, multiplicirt man den Divisor durch den gefundenen Quotienten, denn die Multiplication ist die Probe der Division; ist er nicht genau darinnen enthalten, so subtrahirt man das Produkt vom Dividendus, um zu erfahren, wie viel an der Richtigkeit fehle.

Um in der Folge alle Verwirrung vermeiden zu können, will ich dasjenige, was bey der Division, die nicht leicht ist, gesagt werden muß, jetzt zusammenfassen, und hiernächst zeigen, wie man dividirt.

§. 47.

Man sagt eine Zahl geht in der andern auf, wenn sie ein oder etlichemal ganz in derselben steckt. Das ist, wenn der Dividendus von dem Divisor ausgemessen wird. Z. E. 3 geht in 12, 9, 6 auf, in der Zahl 8 geht 3 nicht auf. Weil die Zahl 3 die Zahl 8 in ganzen Zahlen nicht ausmisset.

Das Addiren, Subtrahiren und Multipliciren fängt man von den Einern an und schreitet zu immer höhern Ordnungen hinauf, von der rechten Hand arbeitet man gegen die linke. Blos das Dividiren geschieht von der linken Hand gegen die rechte, von den Ziffern der höchsten Ordnung zu den Ziffern der niedrigsten.

Den Divisor schreibt man unter den Dividendus, und zwar so, daß, wenn der Werth der ersten Ziffern des Dividendus kleiner als der Divisor ist, man den Divisor unter der zwoten Stelle zu schreiben anfängt. Der Divisor hingegen erhält seinen Platz unter die er-

sten Ziffern, wenn der Werth dieser ersten Ziffern grösser als der Divisor ist. Den gefundenen Quotienten schreibt man hinter den Dividendus. Z. E.

316	466	3769	1769
45,	45,	299,	299,

Wenn man sich durch Uebung im Dividiren einige Fertigkeit erworben hat; so schreibt man um überflüßige Ziffern zu ersparen, den Divisor nur einmal vor den Dividendus, und sondert ihn durch einen Strich ab.

Wenn der Divisor aus Einer Ziffer besteht, so findet man die Größe des Quotienten leicht. Man darf nur in Gedanken mit dem Divisor das Einmalein durchlaufen, bis man auf die höchste Zahl kömmt, welche, durch den Divisor multiplicirt, ein Produkt giebt, das sich noch von dem Dividendus abziehen läßt. Z. E. 36:7, der Quotient ist 5, weil 5mal 7 als 35 das höchste Produkt ist, welches sich von 36 abziehen läßt. Der Quotient von 9 in 61 ist 6, denn 6 mal 9 ist 54 von 61 subtrahirt bleibt Rest 7. Diesen Rest hängt man dem Quotienten als einen Bruch an, dessen Zehler der Rest, der Renner der Divisor ist. Der ganze Quotient ist $6\frac{7}{9}$. Der Rest muß immer kleiner als der Divisor seyn. Ist er größer, so ist der Quotient zu klein genommen. Wenn in diesem Falle die Division durch mehrere Ziffern fortgesetzt wird, so könnte man in der Folge den Quotienten mehr als 9 mal nehmen, welches nicht muß geschehen können.

Besteht aber der Divisor aus mehr als einer Ziffer, so hat man keine andere Regel, durch welche die Größe des Quotienten mit Gewißheit zu bestimmen ist, als daß man den ganzen Divisor durch den wahrscheinlichsten Quotienten multiplicirt. Läßt sich dieß Produkt vom Dividendus abziehen, und bleibt der Rest kleiner als der Divisor, so ist der wahrscheinliche Quotient der

wahre.

wahre. Wenn inzwischen der wahrscheinliche Quotient, mit den beiden höchsten Ziffern des Divisors multiplicirt, ein Produkt giebt, das sich vom Dividendus abziehen läßt; so läßt sich auch wahrscheinlich das Produkt des ganzen Divisors abziehen. Eine hinlängliche Uebung giebt hierinn den beſtene Unterricht.

§. 48.

Eine gegebene Zahl durch eine Zahl von einer Ziffer zu dividiren.

Ist der Divisor in allen Ziffern des Dividendus ganz enthalten; so schreibe man nur hin, wie oft der Divisor in jeder Ziffer des Dividendus steckt, dieß giebt den gesuchten Quotienten

2) 6264820 | 3132410

Geht aber der Divisor nicht in jeder Ziffer des Dividendus auf, so verfährt man, wie folgt.

9 | 7530068 | 836674 2/9
366632 |

Man schreibe den Divisor linker Hand zur Seite. In obigem Exempel steckt der Divisor 9 in 75, 8 mal. 8 mal 9 sind 72, dieß Produkt zieht man ohne es niederzuschreiben, von 75 ab, bleibt Rest 3. Diesen Rest schreibe man unter die 5. Weiter steckt 9 in 33, 3 mal, das Produkt 27 von 33 abgezogen, bleibt Rest 6, 9 in 60, 6 mal, das Produkt 54 von 60 bleibt 6; so verfährt man weiter bis zu den Einern. Am Ende bleibt im obigen Exempel der Rest 2: auch dieser Rest muß durch den Divisor 9 dividirt werden. Die Division geschieht dadurch, daß man dem Reste den Divisor zum Nenner giebt, den Bruch 2/9 hängt man dem gefundenen Quotienten an.

§. 49.

Eine gegebene Zahl durch einen Divisor von verschiedenen Ziffern zu dividiren.

1) Den Divisor schreibe man nach §. 47. unter den Dividendus.

2) Nun suche man den ersten Theil des Quotienten, nämlich man suche, wie oft die erste, oder die beiden ersten Ziffern in den ersten Ziffern des Dividendus steckt.

3) Man multiplicire durch den gefundenen Theil des Quotienten, den ganzen Divisor.

4) Nun ziehe man das Produkt vom Dividendus ab. Ist das Produkt größer als der Theil des Dividendus, von welchem der Abzug geschehen sollte, so hat man den Quotienten zu groß angenommen, man vermindere also den Quotienten so oft um 1 bis sich sein Produkt abziehen läßt.

5) Zum Reste setze man die höchste Ziffer aus dem Dividendus, welche noch keinen Abzug gelitten hat. Schreib die niedrigste Ziffer des Divisors unter diese heruntergenommene Ziffer und verfahre wie 2) 3) 4) 5) sagt. Dieß wiederhohle man so oft, bis die Division geendet ist.

6) Bleibt am Ende ein Rest, so hänge man diesen Rest, als einen Bruch, dessen Nenner der Divisor ist, dem Quotienten an.

```
358 | 873042 | 2438 238/358
    | 358...
    | 716...
    | ------
    | 1570..
    |  358..
    | 1432..
    | ------
    | 1384.
    |  358.
    | 1074.
    | ------
    | 3102
    |  358
    | 2864
    | ------
    |  238
```

Der Divisor 358 steckt im Dividendus 873, 2 mal, das Produkt des Divisors durch den Quotienten 2 ist 716, dieses Produkt von dem Dividendus subtrahirt, giebt den Rest 157. Die nächste 0 aus dem Dividendus diesem Reste beygefügt, den Divisor abermal untergeschrieben. Durch abermalige Division erhält man den Theil des Quotienten nämlich 4, durch solchen den Divisor multiplicirt giebt 1432, dieß Produkt subtrahirt bleibt Rest 138, dem Reste die 4 aus dem Dividendus beygefügt u. s. w.

Der überbliebene Rest ist nie eine ganze Einheit im Quotienten; betrüge er so viel, so hätte man statt der letzten 8, 9 nehmen können. Der Rest ist ein solcher Theil von der Einheit, als der Bruch ausdrückt.

Es gehöret wenig dazu, sich zu gewöhnen, den Divisor nur einmal zur linken Seite des Dividendus zu schreiben, und so den Quotienten zu finden, und das Produkt zu machen. Das Produkt wird wie zuvor niedergeschrieben, die Subtraction verrichtet, und zum Reste wie zuvor die folgende Ziffer aus dem Dividen-

dus gethan. Der Gewinn des Raums und der Zeit wird eine überflüßige Belohnung der hierauf verwandten Mühe seyn.

Besteht der Divisor nur aus einer Ziffer, so ist es, wie schon gesagt, nicht einmal nöthig, das Produkt niederzuschreiben, weil der Rest in diesem Falle nie über 9 ist. Die Art des Dividirens, der man gewohnt ist, ist die leichteste; und warum wollte man sich nicht die kürzeste Art eigen machen, wenn keine Verwirrung dadurch zu besorgen ist?

Wie viel Thaler sind 7650032 Pfennige, da 288 Pfennige 1 Thaler machen?

Man dividire die gegebenen Pfennige, durch die Pfennige eines Thalers.

```
288 | 7650032 | 26562 176/288
    |  576....|
    ----------
     1890...
     1728...
     ------
     1620..
     1440..
     ------
      1803.
      1728.
      -----
       752
       576
       ---
       176
```

Beweis der Division.

Wenn man alle Theile einer Zahl dividirt, so dividirt man die ganze Zahl. Man dividirt aber alle Theile durch den Divisor, folglich ist die ganze gegebene Zahl durch denselben dividirt. Auch der überbliebene Rest wird dadurch dividirt, daß man diesem Reste den Divisor zum Nenner giebt.

§. 50.

§. 50.

Folgende Fälle können einen ungeübten zum Irrthume verleiten.

976	292900132	300102 $\frac{580}{976}$
	2928.....	
	1001..	
	976..	
	2532	
	1952	
	580	

Nachdem das erste Produkt vom Dividendus abgezogen ist, rückt man immer, in allen Fällen, den Divisor entweder im Gedanken, oder wenn man ihn unterschreibt, würklich um eine Stelle des Dividendus niedriger; so oft dieses geschieht, muß der Quotient eine Ziffer bekommen. Steckt der Divisor in dem Theile des Dividendus, so ist die Ziffer, welche der Quotient erhält, eine geltende Ziffer; steckt er nicht darinnen; so ist sie eine 0; oder der Divisor besetzt gleich im Anfange ein oder etliche Ziffern des Dividendus. Alle diese besetzten Ziffern geben dem Quotienten nur eine Ziffer, eine jede folgende Ziffer des Dividendus aber giebt dem Quotienten ebenfalls eine Ziffer.

Im letzten Exempel blieb der Rest, nachdem das erste Produkt abgezogen war, 1, hierzu ward aus dem Dividendus die 0 genommen; aber in 10 steckt der Divisor 976 nicht, daher erhielt der Quotient 0. Man fügte der 10 die folgende 0 bey; aber auch in 100 steckt 976 nicht, daher erhielt der Quotient noch eine 0. Nachdem 100 noch eine Ziffer aus dem Dividendus erhalten, steckt 976 in 1001, 1 mal. Gleich darauf zeigt sich derselbe Fall.

8 | 64000105 | 8000013 $\frac{1}{8}$ Quotient.
21

24 | .144000 | 6000
144

Wie viel Pfund sind hundert tausend Loth?

32 | 100000 | 3125
96...

4·0..
32..

8·0.
64.

160
160

7 | 377200 | 53885 $\frac{5}{7}$
2664

§. 51.

Soll man verschiedene Factoren durch einander multipliciren, und das Produkt durch eine gegebene Zahl dividiren, so kann man nur, um den gesuchten Quotienten zu erhalten, einen von diesen Factoren, welchen man will, durch die gegebene Zahl dividiren, und alsdenn das Product machen.

Die Factoren 6, 3, 37, 2 sollen durch einander multiplicirt, und das erhaltene Produkt 1332 durch 3 dividirt werden. Der Quotient ist 444. Man erhält aber denselben Quotienten, wenn man nur den Factoren 6 durch 3 dividirt, und die Factoren 2, 3, 37, 2 durch einander multiplicirt.

Befindet sich, wie hier, der Divisor unter den Factoren, so darf man solchen nur wegstreichen, und dadurch ist die verlangte Division verrichtet. Die bloße Multiplication der Factoren 6, 37, 2 giebt 444.

Soll die Zahl 377 durch 36 multiplicirt und das Produkt durch 12 dividirt werden; so erhält man den

gesuchten

gesuchten Quotienten, wenn der Factor 36 durch 12 dividirt und mit dem Quotienten 3 der Factor 377 multiplicirt wird.

Beweis.

Weil es auf die Ordnung der Factoren gar nicht ankömmt, so sehe man den dividirten Factoren als den letzten an, der multiplicirt. Ist dieser durch eine erlittene Division halb so groß geworden; so muß auch das Produkt halb so groß werden, folglich thut die Division an einem Factor dasselbe, als wenn das ganze Produkt dividirt wäre.

§. 52.

Eine gleiche Division am Divisor und am Dividendus verändert den Quotienten nicht. Z. E.

18 dividirt durch 6, giebt den Quotienten 3. Die Division beider Zahlen durch 2 giebt 9 statt 18, und 3 statt 6, 9 durch 3 dividirt ist ebenfalls 3.

Beweis.

Steckt eine Zahl einigemale in der andern, so müssen ihre Hälften, ihre Viertel, ihre Drittel eben so oft in einander stecken.

Daß eine gleiche Multiplication am Divisor und am Dividendus den Quotienten nicht ändere, folgt hieraus von selbst.

§. 53.

Bey einer jeden Division steckt der Divisor so oft im Dividendus, als der Quotient 1 in sich fasset. Z. E. 12 dividirt durch 3 giebt den Quotienten 4. 3 steckt 4 mal in 12, und 1 steckt 4 mal in 4.

Beweis.

Beweis.

Dividiren ist: finden, wie oft eine Zahl in der andern steckt: das ist, man soll eine Zahl angeben, die so viel Einer enthält, als oft der Divisor im Dividendus enthalten ist.

Wenn eine Größe, die aus Theilen besteht, welche durch die Addition mit einander verbunden sind, z. E. 3 Pfund, 6 Loth, 2 Quent. multiplicirt oder dividirt werden soll, so muß diese Arbeit an allen Theilen geschehen.

§. 54.

Der schon gesagte Satz, daß eine gleiche Multiplication und eine gleiche Division sich aufhebt, giebt, wie ebenfalls schon gesagt ist, die Probe der Multiplication und auch die Probe der Division. Durch die Multiplication ist im Produkte der eine Factor so oft zusammen gehäuft, als der andere Factor Einheiten hat. Durch eine gleiche Division wird das Produkt wieder in eben so viele gleiche Theile aus einander zerlegt, als es durch die Multiplication zusammengehäuft war.

Um die Probe der Multiplication zu machen, dividire man das Produkt durch einen Factor. Der Quotient zeigt, wenn man keinen Fehler gemacht, den andern Factor.

532		532 | 12768 | 24	
24		1064.	
2128		2128	
1064		2128	
Prod. 12768			

Die Probe der Division ist: daß, wenn man den Quotienten durch den Divisor multiplicirt, der Dividendus

dendus wieder erscheinen muß. Bleibt am Ende der Division ein Rest, so wird dieser Rest zum Produkte addirt.

36 | 13140	365	365
108..		36
234.		2190
216.		1095
180	Prob.	13140
180		
0		

Diejenigen Sätze, welche bey der Division gelten, lassen sich auf die Brüche anwenden; wenn man unter dem Zehler den Dividendus, unter dem Nenner den Divisor, und unter dem Quotienten den Werth des Bruchs versteht. Denn der Zehler eines Bruchs ist durch seinen Nenner dividirt.

§. 55.

Aus dem bisher gesagten sieht man, daß in der Folge oft die Arbeit erleichtert und verkürzt werden wird, wenn man gegebene Zahlen regelmäßig verändert, ohne befürchten zu dürfen, daß das gesuchte Resultat, durch die unternommene Veränderung unrichtig werde. Daß man aber hierbey vorsichtig verfahren müsse, und keine unregelmäßige Veränderung unternehmen dürfe, wird ein jeder leicht einsehen. Einige Fälle die zum Irrthume verleiten können, mögen hier folgen.

Man darf nach (§. 52.) den Divisor und den Dividendus durch eine beliebige Zahl multipliciren, oder dividiren: der Quotient wird hierdurch nicht verändert. Wird aber der Quotient nicht verändert, wenn man eine Zahl, sowohl zum Divisor, als auch zum Dividendus

bus addirt, oder davon subtrahirt? Der Quotient bleibt nicht derselbe; er wird unrichtig. Denn durch eine gleiche Multiplication oder Division wird das Verhältniß zwischen Divisor und Dividendus nicht verändert, weil beide Theile gleich vielmal gröſſer oder kleiner werden. Eine gleiche Addition oder Subtraction hingegen, verändert das Verhältniß zwischen dem Divisor und dem Dividendus, z. E. 6 dividirt durch 2, giebt den Quotienten 3; addirt man zu beiden die Zahl 2, so bekömmt man statt 2, 6, die Zahlen 4, 8. Der Quotient, welcher zuvor 3 war, ist nun 2.

Verhalten sich aber die Zahlen, welche addirt oder subtrahirt werden sollen, zu einander, wie sich der Divisor zum Dividendus verhält; so kann die Addition oder Subtraction ohne Nachtheil des Quotienten geschehen. Z. E. 2 steckt in 6 3 mal. Subtrahirt man vom Divisor 1 vom Dividendus 3, oder addirt man zum Divisor 3, zum Dividendus 9, so bleibt der Quotient in beiden Fällen 3.

Wenn zwo Zahlen addirt werden sollen, so darf man einer Zahl etwas nehmen, und das genommene der andern geben. Die Summe wird hierdurch nicht verändert. Wenn aber zwo Zahlen durch einander multiplicirt werden sollen; darf man ohne Nachtheil des Produkts einem Factor etwas nehmen, und das genommene dem andern Factor geben? Dieß darf man nicht thun. Das Produkt 6 durch 4 ist 24, nimmt man dem Factor 4 zwo und giebt sie dem Factor 6, so werden die Factoren 2 und 8, das Produkt aber 16.

Wenn Zahlen durch einander multiplicirt werden sollen, und unter den Factoren befinden sich eine oder etliche 1, so kann man solche, als unwirksame Factoren, wegstreichen, z. E. was ist das Produkt folgender vier Factoren 2. 1. 3. 1? es ist 6. Hängt aber eine 1

mit

mit einem Bruche zusammen $1\frac{1}{2}$, so darf man diese 1 eben so wenig wegstreichen, als man sie in der Größe 2 Thaler, 1 Groschen, 1 Pfennig, oder als man die Einen in der Zahl 311 aus der Acht lassen darf. Denn in diesen Fällen ist 1 nicht die ganze Größe, sondern nur ein Theil derselben, und ohne diese 1 würden die ganzen Größen, nicht dieselben Größen bleiben.

Man darf der Richtigkeit unbeschadet, den Divisor gegen den Dividendus, auch wenn beide aus Theilen, die durch die Addition mit einander verbunden sind, bestehen, durch eine gleiche Division gegen einander verkleinern, z. E. 12 Thaler, 6 Groschen, 3 Pfennige dividirt durch 18 Groschen, 6 Pfennige. Hier darf man beide ganze Größen, so wohl den Divisor als auch den Dividendus, durch 3 dividiren, und die Division durch die Quotienten verrichten 4 Thlr. 2 Gr. 1 Pf: 6 Grosch. 2 Pf. Bleibt aber der gesuchte Quotient richtig, wenn nur einzelne Theile der gegebenen Grössen, durch eine gleiche Division gegen einander verkleinert werden? Z. E. in der Größe, 7 Thlr. 5 Gr. 6 Pf. dividirt durch 2 Thaler 4 Groschen 3 Pfennige, oder 369 : 279, darf man im ersten Falle, bloß die Pfennige in beiden Größen durch 3, und im andern, die 9 Einer in beiden Größen durch 9 dividiren? Nein, die Verkleinerung muß entweder mit allen Theilen der Größen, oder gar nicht vorgenommen werden. Ich weis aus Erfahrung, wie oft eine so unregelmäßige Division, ein unrichtiges Resultat, beym Verkleinern der Kettenregel verursacht hat.

Wenn zwo Zahlen durch einander multiplicirt werden sollen, so darf man beide Factoren in beliebige Theile, die durch die Addition mit einander verbunden sind, zerlegen; die Theile des Multiplicandus

dus, durch die Theile des Multiplicators multipliciren, und die Produkte addiren. Die Summe giebt das gesuchte richtige Produkt. Darf man aber auch bey der Division den Dividendus, und den Divisor in solche Theile zerlegen, und durch diese Theile die Division verrichten? Darf man z. E. erst durch die Zehner, nachher durch die Einer des Divisors, eine Zahl dividiren? Den Dividendus mag man, ohne Nachtheil des Quotienten, in Theile zerlegen, deren Summe dem Dividendus gleich ist, einen Theil nach dem andern, durch den Divisor dividiren, und die Quotienten addiren, z. E. 24 : 6, die 24 darf ich in 7 und 8 und 9 zerlegen, und jeden Theil durch 6 dividiren, die Summe dieser Quotienten ist der richtige Quotient der ganzen Division. Den Divisor hingegen darf man nicht in Theile zerlegen, deren Summe der Divisor ist, und durch jeden Theil besonders dividiren. In seine Factoren darf man den Divisor zerlegen, und durch einen Factor den Dividendus, durch den andern den gefundenen Quotienten dividiren. Z. E. 36 soll durch 12 dividirt werden. Da 12 aus den Factoren 3, 4 besteht; so kann man 36 durch 4 den Quotienten 9, weiter durch 3 dividiren. Hierdurch erhält man den dritten Theil vom vierten Theile, oder den verlangten zwölften Theil. Aus dem, was gesagt ist, folget: wenn der Dividendus aus Theilen besteht, die durch die Addition mit einander verbunden sind, daß man jeden dieser Theile dividiren dürfe; besteht aber der Divisor aus solchen Theilen, so müssen diese Theile nothwendig in eine Summe gebracht werden. Z. E. 364 soll durch 1 Pfund und 2 Loth dividirt werden, so wird die Division durch 34 Loth geschehen müssen, man sehe (§. 34.)

Es ist gleichgültig, ob man von der Summe zwoer Zahlen eine dritte Zahl subtrahirt; oder ob man diese

Zahl

Zahl von einem Posten subtrahirt; und alsdenn die Summe macht. Es ist gleichgültig, ob man zuerst zwo Zahlen durch einander multiplicirt, und alsdenn das Product durch eine dritte Zahl dividirt: oder ob man zuerst einen Factor durch diese Zahl dividirt, und alsdenn das Product macht. Sollen hingegen verschiedene Zahlen durch einander multiplicirt, und die Producte addirt werden, so ist es nicht gleichgültig, ob man zuerst die Multiplication verrichtet, und alsdenn die Producte addirt; oder ob man zuerst die Factoren addirt, und alsdenn die Producte macht. Im folgenden Exempel erfolgt im ersten Falle 18, im andern 35, denn im letzten Falle werden in der Summe der Factoren, beyde Factoren durch 7 multiplicirt, da ein Factor nur durch 3, der andere durch 4 multiplicirt werden sollte.

3 · 4 = 12	3 · 4
2 · 3 = 6	2 · 3
Summa 18	5 · 7 = 35

Von den Vortheilen, die bey der Division anzuwenden sind.

§. 56.

1) Hat der Dividendus am Ende Nullen, und er soll durch 10, 100, 1000 dividirt werden, so ist die Division geschehen, wenn man gleich viele Nullen am Ende des Divisors und des Dividendus wegstreicht.

100 | 63000 | 630

Der Grund liegt in der Decimal-Ordnung.

2) Besteht aber der Divisor aus einer oder mehreren Ziffern, hinter welchen Nullen hangen, und der Dividendus hat ebenfalls am Ende Nullen, so streicht

man im Divisor und im Dividendus gleichviel Nullen gegen einander weg, und dividirt die noch übrigen Zahlen. Man sieht leicht, daß dies Verfahren eine gleiche Division am Divisor, und am Dividendus ist. 65000 soll durch 3200 dividirt werden.

$$\begin{array}{r|l|l} 32 & 650 & 20\frac{10}{32} \\ & 64 & \\ \hline & 10 & \end{array}$$

$$569000 : 60000$$

$$\begin{array}{r|l|l} 60 & 569 & 9\frac{29}{60} \\ & 540 & \\ \hline & 29 & \end{array}$$

3) Schließt sich der Divisor mit Nullen, der Dividendus hingegen nicht; so schreibe man die Endnullen des Divisors, unter die letzten Ziffern des Dividendus, und dividire blos durch den noch übrigen Theil des Divisors. Am Ende der Arbeit bleiben zum wenigsten die Ziffern des Dividendus, als ein Rest, über, unter welchen die Endnullen des Divisors stehen. 5237904 soll durch 24000 dividirt werden.

$$\begin{array}{r|l|l} 24 & 5237904 & 218\frac{2904}{24000} \\ & 48..000 & \\ \hline & 43. & \\ & 24. & \\ \hline & 197 & \\ & 192 & \\ \hline & 2 & \end{array}$$

4) Die Division mit einer Rangzahl 10, 100, 1000, ist verrichtet, wenn man dem Dividendus so viele von den letzten Ziffern abschneidet als der Divisor Nullen hat, und den abgeschnittenen Zahlen den Divisor zum Nenner giebt.

Z. E. $3765 : 100 = 37\frac{65}{100}$

1) Wenn

1) Wenn der Divisor einer Rangzahl 10, 100, 1000, so nahe ist, daß höchstens 9 fehlen, so dividire man mit der Rangzahl, welches, wie eben gezeigt ist, durch einen bloßen Strich geschehen kann.

2) Die Zahl, welche zur Linken des Abschnitts stehet, multiplicire man mit der Differenz zwischen dem Divisor und der Rangzahl, und setze das Produkt unter den Dividendus.

3) Wenn dies Produkt so groß ist, daß es über den Abschnitt reicht, so multiplicire man dasjenige, was zur Linken des Abschnitts gekommen, abermal mit der Differenz, und setze das Produkt wie zuvor darunter. Dies thue man so lange bis nichts mehr zur Linken des Abschnitts kömmt.

4) Addirt man alles zusammen, der Quotient kömmt in der Summe zur Linken, der Rest zur Rechten des Abschnitts. Jedoch müssen die Einheiten, welche im Addiren aus der Summe der Reste in die Summe der Quotienten gekommen, ebenfals mit dem Reste multiplicirt, und das Produkt gehörig zur Summe addirt werden. Z. E.

	230 | 97	: 93
	16 | 10	
	1 | 12	
	| 7	
Quot	248 | 26	
	| 7	
Rest	33	

Weil die Differenz zwischen 93 und 100, 7 ist, so dividire man mit 100, das ist, man schneide zwo Ziffern ab. Mit der Differenz 7 multiplicire man 230. Weil nun 16 rechter Hand des Abschnitts fällt, so multiplicire man auch 16 durch 7. Von diesem Produkte

reicht noch 1 über den Abschnitt, daher wird auch diese durch die Differenz 7 multiplicirt. Beym Addiren hat man aus den Zehnern 1 im Sinne, welche über den Abschnitt hinüber getragen worden, auch diese 1 wird durch 7 multiplicirt, und das Prod. 7 zur Summe addirt. Es ist also der ganze Quotient $248\frac{33}{91}$.

Drittes Kapitel.

Vom Rechnen mit genannten Zahlen.

§. 57.

Weil sich größere Zahlen nicht so leicht, als kleinere Zahlen, mit einander vergleichen lassen; so hat es die Gewohnheit, und auch die Bequemlichkeit zur Pflicht gemacht, daß man am Ende einer Rechnung, eine Zahl, nicht durch eine kleinere Sorte ausdrückt, wenn sie durch eine größere Sorte, durch ganze Zahlen ausgedrückt werden kann. Am Ende einer Rechnung darf man nicht 877 Pfennige, oder 953 Loth behalten. Die Pfennige werden zu Thalern und Groschen, die Lothe zu Pfunden gemacht. Dies Verfahren, eine Sorte in die andere zu verwandeln, nennet man eine Sorte auf einen andern Namen bringen.

§. 58.

Soll eine Zahl von geringerer Art, zu einer Zahl von höherer Art gemacht werden; so dividire man die Zahl von geringerer Art, durch die Zahl, welche anzeigt, wie oft die höhere Einheit, die geringere in sich fasset. Will man z. E. obige 877 Pfennige in Groschen und Thaler verwandeln, so dividire man die Pfennige deswegen durch 8, weil 1 Groschen 8 Pfennige hat. Der Quotient zeigt die Groschen an, der überbliebene Rest bleiben Pfennige. Man erhält 109 Groschen

schen 5 Pfennige. Weil nun weiter 36 Groschen einen Thaler ausmachen: so dividire man um die in diesen Groschen befindlichen Thaler zu erhalten, 109 durch 36. Der Quotiente giebt die gesuchten Thaler, der Rest aber bleibt Groschen. Nun weis man daß 877 Pfennige so viel als 3 Thaler 1 Groschen 5 Pfennige sind. Durch Dividiren also wird eine geringere Sorte zu einer höhern gemacht.

§. 59.

Soll hingegen eine höhere Sorte zu einer geringern gemacht werden: so multiplicire man die höhere Sorte durch die Theile ihrer Einheit. 7 Thaler, 5 Jahre, 6 Pfund, sollen zu Groschen, Wochen, Lothen, gemacht werden. Weil 1 Thaler 36 Groschen, 1 Jahr 52 Wochen, 1 Pfund 32 Loth hat; so multiplicire man 7 Thaler durch 36 Groschen, 5 Jahre durch 52 Wochen, 6 Pfunde, durch 32 Loth. Die Produkte sind Groschen, Wochen, Lothe.

§. 60.

Genannte Zahlen zu addiren.

Man schreibe die gegebenen Posten so unter einander, daß die Sorten von gleicher Art in einer Columne ihren Platz erhalten. Nun addire man jede Columne besonders, und zwar die geringste Sorte zuerst. Die Summe dieser geringsten Columne mache man zu der nächst höhern Sorte, (§. 58.) den gefundenen Quotienten füge man dieser nächst höhern Columne bey, den etwan überbliebenen Rest, schreibe man unter die niedrigste Columne. Auf gleiche Art verfahre man mit den übrigen Columnen.

Die Summe der		9 Thl.	30 Gr.	$7\frac{1}{2}$ Pf.
Brüche ist $1\frac{3}{4}$ Pf. $\frac{3}{4}$ er=		5 =	24 =	5 =
halten ihren Platz un=		10 =	3 =	$4\frac{3}{4}$ =
ter der Linie, der eine		2 =	15 =	$2\frac{1}{2}$ =
Pfennig in die Columne		2	2	1
der Pfennige gebracht,	Sum.	28 =	2 =	$3\frac{3}{4}$ =

und mit den übrigen Gliedern dieser Columne zusammen addirt, giebt die Summe 19 Pf. diese 19 Pfen. zu Groschen gemacht, giebt 2 Gr. 3 Pf. Diese Groschen in die Columne der Groschen, und die 3 Pf. unter der Linie. Die Summe der Groschen ist 74, diese zu Thalern gemacht, giebt 2 Thaler 2 Groschen, die Thaler in die Columne der Thaler, und die Groschen unter den Groschen. Endlich giebt die Colume der Thaler 28 Thaler.

Pf.	Loth	Qu.		Jahr	Woch.	Tage	St.
3	4	3		10	50	5	19
113	31	$2\frac{3}{4}$		7	23	4	8
1	10	$1\frac{1}{2}$		23	15	—	23
1	1	1		—	3	6	20
				1	2	2	
Sum.	118	14	$3\frac{1}{4}$	Sum.	41	41	3	24

§. 61.

Genannte Zahlen zu subtrahiren.

Diejenigen Zahlen, die gleiche Namen haben, schreibe man untereinander. Sind die Glieder der Größe, die abgezogen werden soll, kleiner, als die gleichnahmigen Glieder der Größe, von welcher der Abzug geschieht; so subtrahire man wie gewöhnlich. Z. E. von

316	Rthl.	32	Gr.	7	Pf.
24	=	19	=	6	=
Rest 292	Thlr.	13	Gr.	1	Pf.

Soll

Soll aber ein gröſseres Glied von einem kleinern abgezogen werden, ſo borge man eine Einheit aus der nächſt höhern Gröſse, und addire die Theile dieſer Einheit zu dem Gliede, das zu klein war, ſo kann der Abzug geſchehen.

Pf.	Loth	Qu.	Dert.
313	15	2	3
90	24	3	1
222	22	3	2

Probe.

Pf.	Loth	Qu.	Dert.
90	24	3	1
222	22	3	2
1	1		
313	15	2	3

Ein Dertgen von 3 Dertgen bleiben 2 Dertgen, 3 Quentgen konnte man von 2 Quentgen nicht wegnehmen, daher borgte man 1 Loth aus den 15 Lothen, welches mit den 2 Quentgen 6 Quentgen machten, nun konnte man 3 Quentgen von 6 Quentgen abziehen, und behielt 3 Quentgen zum Reſte. Die 15 Loth ſind, weil hievon 1 abgenommen iſt, nur noch 14 Loth, 24 Loth können von 14 Loth nicht genommen werden, man borgte daher 1 Pfund, welches 32 Loth hat; zu dieſen die 14 Lothe addirt, gab 46 Loth, hiervon 24 Loth abgezogen, blieb Reſt 22 Loth; 90 Pfund, von 312 Pf. blieb 222 Pfund.

Die Probe iſt die gewöhnliche Probe. Wenn man nämlich den Reſt wieder zur kleinſten Gröſse addirt, ſo erſcheint in der Summe diejenige Gröſse, von welcher der Abzug geſchehen.

					Pf.	Loth	Qu.	Dert.
		36		8				
5	Rthl.	0	Gr.	0	Pf.	16	4	2	1
3	=	22	=	5	=	11	0	2	0
Reſt 1	Rthl.	13	Gr.	3	Pf.	Reſt 5	4	0	1

				7		24		60			
10	Jahr	45	W.	0	Tag.	0	St.	0	Min.	5	Sec.
3	=	30	=	3	=	0	=	0	=	30	=
Rest 7	Jahr	14	W.	3	Tag.	23	St.	59	Min.	35	Sec.

§. 62.

Genannte Zahlen zu multipliciren.

Um eine Größe, die aus verschiedenen Gliedern von verschiedener Art besteht, durch eine Zahl von einer Art zu multipliciren; multiplicire man alle Glieder des Multiplicandus durch den Multiplicator, so, daß man von der niedrigsten Sorte rechter Hand anfängt, die Produkte bringe man zur nächst höhern Benennung, wenn sie eine völlige Einheit dieser Classe ausmachen.

		17	Rthl.	15	Gr.	5	Pf.
				7		7	=
	119	Rthl.	105	Gr.	35	Pf.	
				4			
	119	Rthl.	109	Gr.	3	Pf.	
				3			
Prod.	122	Rthlr.	1	Gr.	3	Pf.	

§. 63.

Genannte Zahlen zu dividiren.

Wie in ungenannten Zahlen das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, von der rechten Hand gegen die linke, von der niedrigsten Ordnung zu den höhern Ordnungen geschieht, so auch in genannten Zahlen. Wie gegentheils in der Division von der linken Hand gegen die rechte, von der höchsten Ordnung zu den niedrigern fortgeschritten wird, so geschieht es auch in genannten Zahlen.

§. 64.

§. 64.

Die Diviſion aber geſchieht wie die Multiplication, an jedem Theile des Dividendus. Wie es eigentlich geſchieht, wird folgendes Exempel zeigen.

57 Wiſpel, 35 Himten und 3 Metzen Korn, ſollen durch 8 dividirt werden, wie groß iſt der Quotient?

Wenn man einem jeden Theile des Dividendus, den Diviſor zum Nenner giebt; ſo iſt die Diviſion verrichtet. Der Quotient iſt alſo $\frac{57}{8}$ Wiſpel, $\frac{35}{8}$ Himten, $\frac{3}{8}$ Metzen. Weil es aber nicht gewöhnlich iſt, den Quotienten in gebrochenen Zahlen zu liefern, ſo findet man, wenn die Zehler durch ihre Nenner dividirt werden, wie viel Ganze die unächten Brüche enthalten; hiedurch bekömmt man $7\frac{1}{8}$ Wiſpel, $4\frac{3}{8}$ Himten, $\frac{3}{8}$ Metzen. Da nun 1 Wiſpel 40 Himten, 1 Himten 4 Metzen ausmacht, ſo findet man durch die Kettenregel, wie viel Himten $\frac{1}{8}$ Wiſpel, und wieviel Metzen $\frac{3}{8}$ Himten ſind. Dieſe gefundenen Himten addire man zu den Himten des Quotienten, und die gefundenen Metzen zu den Metzen deſſelben. Nun hat man in 7 Wiſpel 9 Himten $1\frac{7}{8}$ Metzen den geſuchten Quotienten.

Es kann zwar die Diviſion in genannten Zahlen nicht eher völlig verſtanden werden, bevor man nicht etwas von der Kettenregel weis, und die Lehre von den Brüchen näher kennt, als ſie (§. 40.) bekannt gemacht iſt. Inzwiſchen habe ich Urſache genug zu der gewählten Ordnung gehabt. Die Lehren der Arithmetik fließen ſo in einander, daß es ſich nicht immer vermeiden läßt, etwas zu ſagen, das erſt in der Folge ſeine Klarheit erhält; wenn man nicht, um dieſes zu vermeiden, in den wichtigern Fehler, die Materien, welche zuſammen gehören, zu ſehr auseinander zu reiſſen, verfallen will.

Die Fälle wo genannte Zahlen durch genannte Zahlen multiplicirt oder dividirt werden, kommen vornem-

lich in der Kettenregel vor. Wie man aber am vortheilhafteſten verfährt, wenn eine Größe, die verſchiedene Namen hat, durch eine andere Größe von verſchiedenen Namen, multiplicirt oder dividirt werden ſoll; wird da gezeigt werden, wo es angewandt werden muß.

Viertes Kapitel.

Von den Proportionen und Progreſſionen.

I. Abſchnitt.

Von den Proportionen.

§. 65.

Von zwoen Zahlen, die von einander unterſchieden ſind, ſagt man, daß ſie ein Verhältniß unter ſich haben. Vergleicht man dieſe gleiche Zahlen mit einander, ſo kann man entweder auf ihren Unterſchied, welcher durch die Subtraction gefunden wird, achten, oder darauf ſehen, wie oft eine Zahl in der andern ſteckt; das iſt, man ſieht auf den Quotienten, welcher durch die Diviſion einer Zahl in die andere, gefunden wird.

Es giebt alſo zweyerley Verhältniſſe: 1) dasjenige, bey welchem man die Differenz zum Augenmerke hat, heißt ein **arithmetiſches** Verhältnis. 2) Dasjenige, bey welchem man auf den Quotienten ſieht, heißt ein **geometriſches** Verhältniß. In beyden Verhältniſſen ſind die Zahlen ſelbſt die Glieder der Verhältniſſe. Die Differenz im erſten Falle, und der Quotient im andern Falle, heißt der **Name der Verhältniſſe.** Das geometriſche Verhältniß zwiſchen Louisd'or und Thaler iſt 1 zu 5, Gulden zu Thaler 3 zu 2, Himten zu Wiſpel 40 zu 1, weil ein Louisd'or 5 Thaler, 3 Gulden

den 2 Thaler, 40 Himten 1 Wispel ausmachen. Die Namen der Verhältnisse sind 5, $1\frac{1}{2}$, 40.

§. 57.

Weil der Name des arithmetischen Verhältnisses durch die Subtraction, der Name des geometrischen durch die Division gefunden wird, so drückt man das erstere durchs Zeichen der Subtraction, das andere durchs Zeichen der Division aus. $8 \overset{5}{—} 3$, $8 : 4$. Der Name der Verhältnisse ist hier 5 und 2.

§. 58.

Es können unendliche Paare Zahlen, die in Ansehung der Größe sehr verschieden sind, einerley Namen der Verhältnisse haben, z. E. $6 \overset{3}{—} 3$, $9 \overset{3}{—} 6$, $5 \overset{3}{—} 2$, oder $6 : 3$, $8 : 4$. Alle Verhältnisse, die gleiche Namen haben, sind sich gleich, und die sich gleich sind, haben einerley Namen. Denn es kömmt bey einem Verhältnisse nicht auf die Größe der Glieder, sondern aufs Verhältniß der Glieder unter einander an. Dieses aber wird durch den Namen bestimmt. Die Breite eines viereckten Tisches sey 2 Fuß, die Länge 3 Fuß. Die Breite des Zimmers, in welchem der Tisch steht, sey 4 Ruthen, die Länge 6 Ruthen. Dieses Zimmer hat deswegen mit dem Tische ein gleiches geometrisches Verhältniß, weil sich die Länge des Tisches zu seiner Breite eben so verhält, wie sich die Länge des Zimmers zu seiner Breite verhält. Das ist, weil beyde Verhältnisse einerley Namen, nämlich $1\frac{1}{2}$ haben.

Man kann daher zwey Verhältnisse, die gleiche Namen haben, durchs Zeichen der Gleichheit mit einander verbinden, weil sie gleich sind, die Glieder mögen der Größe nach, noch so sehr von einander unterschieden seyn.

§. 59.

§. 59.

Zwey durchs Zeichen der Gleichheit mit einander verbundene Verhältnisse nennet man eine **Proportion.** Sind die mit einander verbundene Verhältnisse arithmetisch, so ist es eine arithmetische Proportion, sind sie geometrisch, eine geometrische Proportion. Z. E. $2 : 4 = 9 : 18$. Diese geometrische Proportion lieset man, wie sich 2 zu 4 verhalt, so verhält sich 9 zu 18; das ist, 2 steckt so oft in 4, als 9 in 18. $7 - 4 = 5 - 2$ Diese arithmetische Proportion lieset man, wie sich 7 zu 4 verhält, so 5 zu 2. Das ist, die Differenz zwischen 7 und 4 ist so groß, als die Differenz zwischen 5 und 2 ist.

Beyde Proportionen kann man so richtig von der rechten gegen die linke, als von der linken gegen die rechte Hand lesen und schreiben. Obige Proportionen können daher nach Belieben auch so geschrieben werden. $18 : 9 = 4 : 2$, $2 - 5 = 4 - 7$.

§. 60.

Um mich kurz fassen zu können, habe ich die arithmetische und geometrische Proportion, welche gewöhnlich jede besonders pflegt vorgetragen zu werden, zusammengezogen. Wenn man nur in der Folge bey der arithmetischen Proportion addirt und subtrahirt, wo man bey der geometrischen multiplicirt und dividirt; so wird dasjenige, was von der einen Proportion gesagt wird, auch von der andern gelten, und eine Verwirrung ist daher nicht zu befürchten.

Aus einer zwiefachen Ursache werde ich in der Folge nicht immer der arithmetischen Proportion erwehnen, einmal, weil das, was von der geometrischen Proportion gesagt wird, mit der eben angezeigten Veränderung, auch von der arithmetischen gilt, zweytens, weil

weil die arithmetiſche Proportion, bey weitem den Einfluß aufs gemeine Leben nicht hat, wie die geometriſche Proportion.

§. 61.

In jeder geometriſchen Proportion iſt das Produkt der beyden mittelſten Glieder, dem Produkte der beyden äußerſten Glieder gleich. In der arithmetiſchen Proportion iſt ſich die Summe dieſer Glieder gleich.

3 : 12 = 2 : 8, 7 — 10 = 3 — 6
12 . 2 = 3 . 8 = 24, 10 u. 3 = 7 und 6

Beweis.

Um ſo vielmal in der geometriſchen Proportion das zweyte Glied größer als das erſte iſt, eben um ſo vielemal iſt auch das vierte Glied größer als das dritte. Es muß daher der größeſte Factor des erſten Paars, mit dem kleinſten Factor des zweyten Paars multiplicirt, daſſelbe Product geben, als wenn der kleinſte Factor des erſten Paares, mit dem größeſten Factor des andern Paares, multiplicirt wird.

§. 62.

In einer jeden geometriſchen Proportion muß 1) wenn im erſten Paare das erſte Glied das größeſte iſt, auch im andern Paare das erſte Glied das größeſte ſeyn. 2) Der Name der Verhältniſſe muß in beyden Paaren gleich ſeyn. 3) Die Mittelglieder müſſen daſſelbe Produkt als die Endglieder geben. Eben dies gilt auch von der arithmetiſchen Proportion, wenn man nur ſtatt der Produkte, hier die Summen macht.

Um die Richtigkeit einer geometriſchen Proportion zu unterſuchen, darf man alſo nur die Mittelglieder durcheinander, und die Endglieder durcheinander multi-

tipli-

tipliciren; und in einer arithmetischen addiren. Sind die gefundenen Produkte, oder die Summen gleich, so sind die Proportionen richtig.

§. 63.

Zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden.

Soll die Proportion geometrisch werden, so multiplicire man das dritte Glied durchs zweyte, und dividire das erhaltene Produkt durchs erste Glied. Der Quotient ist das gesuchte vierte geometrische Proportionalglied.

Soll die Proportion arithmetisch werden; so addire man das dritte Glied zum zweyten, und subtrahire von der Summe das erste Glied. Die gegebenen Zahlen mögen seyn, 3, 5, 9,

3 : 5 = 9 : 15, 3 — 5 = 9 — 11.

Beweis.

Wenn man in obiger geometrischen Proportion das vierte Glied 15 schon hätte, so würde man dieses Glied noch einmal erhalten, wenn es durchs erste Glied 3 multiplicirt, und das Produkt 45, durch dasselbe erste Glied wieder dividirt würde. Da nun das Produkt der beyden äußersten Glieder, dem Produkte der beyden mittelsten Glieder gleich ist; so ist es ja gleichgültig, ob man die 45, welche durch die Endglieder erwachsen, oder ob man die 45, welche aus den Mittelgliedern erwachsen, durchs erste Glied 3 dividirt, in beyden Fällen erscheint das gesuchte 4te Glied 15.

Verwandelt man das Multipliciren in Addiren, und das Dividiren in Subtrahiren; so findet man in diesem Beweise, auch sehr leicht den Beweis des Suchens der vierten arithmetischen Proportionalzahl.

§. 64.

§. 64.

Die Regel De tri, und die Kettenregel, wenn die letztere aus einem einfachen Satze besteht, ist nichts anders, als das Suchen der vierten geometrischen Proportionalzahl. Z. E. wie viel Thaler kosten 90 Pfund, wenn 5 Pfund 4 Thaler kosten? Das ist, man soll eine Zahl finden, in welcher 4 Thaler so oft stecken, als 5 Pfund in 90 stecken; oder wie sich 5 Pfund zu 90 Pfund verhalten, so verhalten sich 4 Thaler zum gefundenen Facit.

5 Pf. : 90 Pf. = 4 Thal. : 72 Thal.

90 Pf.
5 Pf. . . . . 4 Thal. Fac. 72.

§. 65.

Wenn das zweyte Glied zugleich die Stelle des dritten vertritt, so nennet man die Proportion eine Stetige Proportion, und dies Glied ein Doppelglied. Soll zu zwoen Zahlen die dritte Proportionalzahl gefunden werden, so braucht man nur das Doppelglied in die zwote und dritte Stelle zu schreiben, und alsdenn, wie gezeigt ist, das vierte Glied zu suchen.

2 : 6 = 6 : 18. wie 2 zu 6, so 6 zu 18.

§. 66.

Eine Proportion wird nicht verändert, wenn man alle Glieder derselben durch eine und dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt. Denn die Produkte oder Quotienten verhalten sich in diesem Falle gegen einander, wie die multiplicirten oder dividirten Zahlen.

§. 67.

Harmonische Glieder einer geometrischen Proportion sind diejenigen Glieder, welche sich, ohne daß das

gesuchte

gesuchte vierte Glied, oder das Facit verändert, oder die Proportion unterbrochen wird, durch eine beliebige Zahl multipliciren oder dividiren lassen. Daß eine gleiche Addition oder Subtraction in einer arithmetischen Proportion, das vierte Glied eben so wenig ändere, ist kaum nöthig zu erinnern.

Harmonische Glieder in beyden Proportionen sind das erste und zweyte, das dritte und vierte, das erste und dritte, das zweyte und vierte. Hingegen ist das zweyte Glied nicht mit dem dritten, und das erste nicht mit dem vierten harmonisch. Um dieses kürzer zu fassen: Beyde Endglieder sind mit den beyden Mittelgliedern harmonisch, hingegen sind beyde Endglieder mit einander nicht harmonisch, und die Mittelglieder sind mit einander nicht harmonisch.

Man kann daher die harmonischen Glieder ohne Nachtheil des vierten Gliedes oder des Facits, durch eine gleiche Multiplication vergrössern, oder durch eine gleiche Division verkleinern.

Beweis.

Bey einer Proportion kömmt es nicht auf die Grösse der Zahlen, sondern blos aufs Verhältnis der Zahlen unter einander an. Da nun durch eine gleiche Multiplication oder Division zweyer harmonischen Glieder, das Verhältniß dieser Glieder nicht verändert wird; so muß das gesuchte vierte Glied dasselbe seyn, man mag die Division oder Multiplication dieser Glieder unternehmen oder nicht unternehmen, wenn nur das unharmonische Glied unverändert bleibt.

$$\begin{array}{rl} 2) & \underline{8 : 16 = 6 : 12} \\ & 4 : 8 = 6 : 12 \\ \hline 4) & 1 : 2 = 6 : 12 \end{array}$$

Dieselbe

Dieſelbe gilt auch vom erſten und dritten Gliede

$$2)\begin{array}{l} \frac{8}{} : 16 = \frac{6}{} : 12 \\ 4 : 16 = 3 : 12 \end{array}$$

Hierin, daß man nämlich die harmoniſchen Glieder einer Proportion durch eine gleiche Diviſion verkleinern dürfe, liegt der Grund des ſo wichtigen Vortheils des Aufhebens in der Kettenregel. Denn die Glieder der einen Columne ſind mit den Gliedern der andern Columne harmoniſch.

Daß man den Diviſor und den Dividendus, daß man den Nenner und Zehler eines Bruchs durch eine und dieſelbe Zahl dividiren dürfe, gründet ſich ebenfals hierauf. Denn eine jede Diviſion, und ein jeder Bruch iſt eine geometriſche Proportion. Wie ſich der Diviſor zum Dividendus verhält, ſo verhält ſich 1 zum Quotienten. Und wie ſich der Nenner zum Zehler verhält, ſo verhält ſich 1 zum Bruche. 8 dividirt durch 4 giebt den Quotienten 2.

$$4 : 8 = 1 : 2, \quad 4 : 3 = 1 : \tfrac{3}{4}$$

Eine jede Multiplication iſt ebenfals eine geometriſche Proportion. Wie ſich 1 zu einem der Factoren verhält, ſo verhält ſich der andere Factor zum Produkte. Das iſt, 1 ſteckt ſo oft in dem einen Factor als der andere Factor im Produkte ſteckt. 2 mal 8 iſt 16

$$1 : 2 = 8 : 16, \quad 1 : 8 = 2 : 16$$

Weil aber die Factoren immer die Mittelglieder der Proportion, welche nicht harmoniſch ſind, ausmachen; ſo dürfen auch die Factoren durch eine gleiche Diviſion nicht verkleinert werden.

§. 68.

Wenn man aber ein paar harmoniſche Glieder in einer geometriſchen Proportion, entweder das erſte

und zweyte, oder das erste und dritte Glied durch ein paar verschiedene Zahlen multiplicirt, so verhalten sich die gefundenen vierten Proportionalzahlen, oder die Facitte, welche vor und nach der Multiplication erfolgen, gegen einander, wie sich die Multiplicatoren gegen einander verhalten. Dis gilt auch von der Division. Z. E. 2 : 4 = 3 : Facit 6. Wenn man das erste Glied durch 3, das andere durch 2 multiplicirt, und alsdenn das vierte Glied sucht, so muß dis gefundene vierte Glied, sich zu dem vierten Gliede 6 verhalten, wie 3 zu 2.

6 : 8 = 3 : Fac. 4. 4 : 6 = 2 : 3.

Beweis.

Das gesuchte vierte Glied wächst mit dem zweyten Gliede; das ist, wie das zweyte Glied gegen das erste, größer oder kleiner wird, eben so wird auch das vierte Glied gegen das dritte größer oder kleiner. Nun wird durch eine Multiplication mit verschiedenen Zahlen, das Verhältniß des ersten Paars so verändert, wie sich die Multiplicatoren gegen einander verhalten; folglich wird das Verhältniß des zweyten Paars, dadurch eben so abgeändert, wenn das vierte Glied nach der Multiplication gefunden wird.

Dis ist eigentlich der Grund der Kettenregel, wovon in der Folge mehr wird gesagt werden.

§. 69.

Brüche in einer Proportion ändern nichts, man behandle sie, wie man Brüche behandelt, welches in der Folge gezeigt wird. Will man aber doch eine Proportion, welche aus Brüchen besteht, durch ganze Zahlen ausdrücken, so bringe man sie zu gleicher Benennung, und setze nur die Zehler an ihre vorige Stellen.

Denn

Denn sind die Nenner gleich, so verhalten sich die Brüche gegen einander, wie sich ihre Zehler gegen einander verhalten. Dieser Paragraph erhält erst in der Folge seine Klarheit.

§. 70.

Da das Suchen der vierten geometrischen Proportionalzahl nichts anders ist, als das Facit eines Exempels der Regel Detri, oder der Kettenregel von einem Satze, suchen; und eine jede Proportion aus vier Gliedern besteht: so enthält eine jede Proportion vier Aufgaben in sich. Man darf nur ein Glied nach dem andern als das gesuchte Glied ansehen, welches die vierte Stelle erhält. Wenn nur das dritte und vierte Glied einerley Namen, und das zweyte und erste Glied ebenfalls einerley Namen bekömmt; und soll das vierte Glied größer als das dritte werden, auch das zweyte Glied größer als das erste seyn müsse. Aus der Proportion 3 Pf. : 9 Pf. = 7 Thal. : 21 Thal. lassen sich folgende vier Aufgaben herleiten.

1) Wie viel Thaler kosten 9 Pfund, wenn 3 Pfund 7 Thaler kosten. 3 Pf. 9 Pf. = 7 Thal. 21 Thal.

2) Wie viel Thal. kosten 3 Pfund, wenn 9 Pf. 21 Thal. kosten. 9 Pf. 3 Pf. = 21 Thal. 7 Thal.

3) Wie viel Pf. erhält man für 21 Thal. wenn 3 Pf. 7 Thal. kosten. 7 Thal. 21 Thal. = 3 Pf. 9 Pf.

4) Wie viel Pf. erhält man für 7 Thaler, wenn 9 Pf. 21 Thal. kosten. 21 Thal. 7 Thal. = 9 Pf. 3 Pf.

II. Abschnitt.

Von den Progressionen.

§. 71.

Wenn eine Reihe Zahlen in arithmetischer Verhältniß in gleichen Schritten fort geht, so nennet man diese Reihe eine **Arithmetische Progression.** Z. E.

1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6, oder 2 — 4 — 6 — 8 — 10,
oder 1 — 5 — 9 — 13 — 17.

§. 72.

Eine Reihe Zahlen, die in geometrischer Verhältniß mit gleichen Schritten fort geht, heißt eine geometrische Progression. Z. E.

2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64, 1 : 3 : 9 : 27 : 81

§. 73.

Ein jedes Glied in beyden Progressionen ist außer dem ersten und letzten ein Doppelglied. Drey bey einander stehende Glieder einer Progression, machen also immer eine stetige, und vier bey einander stehende Glieder eine unterbrochene Proportion aus. Die hier folgenden Exempel sind aus obigen Progressionen genommen.

2 : 4 = 4 : 8, 2 : 4 = 8 : 16, 3 — 4 = 5 — 6

Aber auch zwey bey einander stehende Glieder machen mit zwey bey einander stehenden Gliedern, wenn schon einige darzwischen stehende Glieder der Progression übergangen werden, eine Proportion aus. Denn der Name der Verhältniß ist in beyden Paaren gleich, 2 : 4 = 32 : 64

§. 74.

Wenn man irgend ein Glied einer geometrischen Progression als das Mittelglied ansieht, so sind die Produ-

Produkte aller der gleich weit von diesem Mittelgliede abstehenden Glieder, gleich groß, und so groß als das Quadrat des Mittelgliedes ist. 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64, 8 mal 8, 4 mal 16, 2 mal 32, 1 mal 64, alle diese Produkte geben 64. Die Addition leistet in der arithmetischen Progression dasselbe. 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6, 3 und 3, 2 und 4, 1 und 5, eine jede Summe ist 6.

Ist daher das erste und letzte Glied einer geometrischen Proportion gegeben, und man soll das Mittelglied finden, so darf man nur aus dem Produkte des ersten und letzten Gliedes die Quadratwurzel ziehen.

Soll man das Mittelglied in einer arithmetischen Progression finden, wenn das erste und letzte Glied gegeben ist, so wird der Quotient, wenn die Summe dieser Glieder durch 2 dividirt wird, das gesuchte Mittelglied seyn.

Soll zwischen zwoen gegebenen Zahlen eine mitlere Proportionalzahl gefunden werden, so darf man nur diese Zahlen, als zwo Glieder einer Progression ansehen, und nach den gegebenen Vorschriften verfahren.

Soll zwischen zwoen gegebenen Zahlen mehr, als eine arithmetische Proportionalzahl gefunden werden, so kömmt es nur darauf an, die erste davon zu finden, weil sich die folgenden dadurch von selbst ergeben, wenn man, um das folgende Glied zu erhalten, nur den Namen der Verhältnisse zum schon gefundenen addirt. Man dividire die Differenz des ersten und letzten Gliedes durch die Anzahl der Glieder, welche nach dem ersten folgen sollen, und addire den Quotienten zum ersten Gliede, diese Summe ist das erste der Mittelglieder, z. E. zwischen 3 und 27 sollen 7 Mittelglieder gefunden werden. 27 weniger drey ist 24, 24 dividirt durch 8, als der Zahl der Glieder, welche folgen sollen,

giebt 3, hierzu das erste Glied 3 addirt giebt 6, als das erste Mittelglied. Die Progreßion wird

3 — 6 — 9 — 12 — 15 — 18 — 21 — 24 — 27

§. 75.

Wenn in einer arithmetischen Progreßion das letzte Glied aus der gegebenen Anzahl der Glieder, dem gegebenen Namen der Verhältnisse, und aus dem ersten Gliede gefunden werden soll; so multiplicire man die gegebene Anzahl der Glieder, weniger Ein Glied, durch den Namen der Verhältnisse, und addire das erste Glied zum Produkte.

3 — 5 — 7 — 9 — 11 — 13 — 15

Diese Progreßion besteht aus 7 Gliedern, der Name der Verhaltnisse ist 2, 2 mal 6 ist 12, und 3 ist 15, als das letzte Glied.

Beweis.

Eine arithmetische Progreßion erwächst dadurch, daß man immer zum vorhergehenden Gliede den Namen der Verhältnisse addirt. Weil nun im ersten Gliede dieser Name nicht befindlich ist, so wird durch den Namen Ein Glied weniger, als Glieder sind, multiplicirt. Das zweyte Glied bestehet aus dem ersten Gliede und dem Namen, das dritte aus dem ersten Gliede und dem Namen zweymal, das vierte, aus dem ersten und dem Namen dreymal u. s. w.

Ist das erste Glied der gegebenen Progreßion das größeste; so ist sie abnehmend; in diesem Falle darf man nur den Namen der Verhältniß, so oft vom ersten Gliede subtrahiren, als Glieder außer dem ersten in der Progreßion sind.

Das letzte Glied der geometrischen Progreßion findet man am bequemsten durch eine wiederholte Multiplication der Glieder mit dem Namen der Verhältniß.

§. 76.

§. 76.

Um die Summe einer arithmetischen Progreßion zu finden, wenn das erste und letzte Glied nebst der Anzahl der Glieder gegeben ist; addire man das erste und letzte Glied, und multiplicire mit dieser Summe, die halbe Anzahl der Glieder. Das Produkt ist die Summe der ganzen Progression. Z. E.

4 — 7 — 10 — 13 — 16 — 19 — 22, 4 und 22 ist 26, diese durch die Hälfte der Glieder, nämlich $3\frac{1}{2}$ multiplicirt, giebt 91, als die Summe aller Glieder. Wie viel ist die Summe der Progression, 1 — 2 — 3 bis 100? 101 mal 50, ist 5050.

Beweis.

Da die Summe aller zwey Glieder, die gleich weit von der Mitte abstehen, so groß ist, als die Summe des ersten und letzten Gliedes; so ist die Summe so oft in der Progression enthalten, als Paare Glieder in derselben sind; das ist, als die Hälfte der Glieder.

Fünftes Kapitel.

Etwas von der Kettenregel.

§. 77.

Schon jetzt sehe ich mich genöthigt, etwas von der Kettenregel zu sagen, obgleich die völlige Ausführung dieser so wichtigen Lehre, ein Gegenstand einer spätern Bearbeitung seyn wird. Ihr weiter Umfang erstreckt sich auch auf die Lehre von den Brüchen, und ohne sie würde diese Lehre die leichte Wendung nicht erhalten können, welche ihr durch Hülfe der Kettenregel ertheilt werden kann. Hingegen ist die Kenntniß der Brüche nothwendig, um den ganzen Umfang der

Kettenregel verstehen zu können. Da aber die Auflösung der einfachen Aufgaben zu dem angezeigten Zwecke schon hinreichend ist; so werde ich mich auch jetzt nur hierauf einschränken, und hier nur so viel sagen, als nothwendig ist, um die leichtesten Fälle auflösen zu können.

§. 78.

Durch die Kettenregel findet man eine Zahl, welche sich zu einer gegebenen Zahl eben so verhält, wie sich ein paar andere gegebene Zahlen zu einander verhalten. Z. E. 47 Pfund kosten 13 Thaler, wie viel Pfennige kostet 1 Quentgen? Man soll nämlich eine Anzahl Pfennige finden, die eben so oft in 13 Thalern stecken, als 1 Quentgen in 47 Pfunden enthalten ist.

Ein geordnetes Exempel der Kettenregel, besteht aus zwo Reihen Zahlen, welche unter einander geschrieben sind, aus zwo Columnen.

§. 79.

Eine jede Aufgabe enthält eine Frage von einer unbekannten Sache, die durch die Auflösung bekannt gemacht werden soll. In obiger Aufgabe ward gefragt: wie viel Pfennige 1 Quentgen koste? Die Frage macht immer die oberste Reihe eines jeden Exempels der Kettenregel aus, und zwar ist der Name der verlangten Antwort immer das oberste Glied linker Hand; der Gegenstand der Frage ist immer das oberste Glied rechter Hand. Auf die Frage, wie viel Pfennige kostet 1 Quentgen? würde man antworten einige Pfennige. Daher ist dis erste Glied Pfennig, das andere Quentgen. Das erste Glied bezeichne man mit den Buchstaben r. Dis r ist ein redendes Zeichen, es sagt: daß diese erste Columne die andere theile. Man lese dis Zeichen r (wie viel)

Wie

Wie viel Pfennige kostet 1 Quentgen, wird ausgedrückt: T Pf. 1 Quentg.

Wie viel Gulden sind 37 Thaler? T Gnld. 37 Thal.

Wie viel Zinse bringen 46 Thal. T Zinse. 46 Thal.

Wie viel Bog. schreiben 7 Mensch. T Bog. 7 Mensch.

Weil es aufs Ordnen eines Exempels vornemlich ankömmt, so wird das jetzt gesagte, durch folgendes vielleicht noch deutlicher. Eine jede Frage hat zum wenigsten zwey Theile, erstlich die Frage selbst, oder dasjenige, was man zur Antwort verlanget; zweytens den Gegenstand der Frage. Z. E. wie viel Stück Garn? Diese Frage ist noch nicht vollständig, ihr fehlt der zweyte Theil. Fügt man diesen hinzu, so wird sie vollständig. Wie viel Stück Garn gehören zu 8 Ellen? Diese vollständige Frage macht immer die oberste Reihe der Kettenregel aus. Und da die Antwort Stücke seyn würden, so fängt man linker Hand zu schreiben an: Wie viel Stück. T Stück . . 8 Ellen. Der Name des ersten Gliedes ist immer mit dem Namen, des am Ende der Rechnung gefundenen Resultats, einerley.

§. 80.

Weil aber aus lauter unbekannten Dingen nichts bestimmt werden kann; so muß die Aufgabe entweder auch bekannte Dinge enthalten, durch deren Hülfe das unbekannte gefunden wird, oder die bekannten Dinge, durch deren Hülfe das unbekannte gefunden werden kann, sind von der Art, daß ein jeder sie von selbst weis. In diesem Falle können sie aus der Aufgabe weggelassen werden. Z. E. wie viel Stück Garn gehören zu 8 Ellen, wenn zu 100 Ellen 94 Stück gehören? Dis wäre eine vollständige Aufgabe der ersten Art. Eine vollständige Aufgabe der zwoten Art wäre: Wie viel Thaler sind 77 Gulden? Hier ist zwar nichts bekanntes angegeben, wodurch das gesuchte gefunden werden kann;

allein ein jeder weis, daß 2 Thaler 3 Gulden sind. Nun ist auch die zwote Aufgabe aufzulösen.

§. 81.

Es müssen in beyden Columnen gleiche Namen enthalten seyn. Ob gleich diese Regel, wiewol selten, eine Ausnahme leidet, so ist sie doch immer die Richtschnur, nach welcher man bestimmet, in welcher Columne die folgenden Glieder ihren Platz erhalten müssen. Die jetzt angegebenen Aufgaben ordnet man nun nach dieser Regel ohne Schwierigkeit.

1 Stück . .	8 Ellen	1 Thal. . .	77 Guld.
100 Ellen . .	94 Stück	3 Guld. . .	2 Thal.

§. 82.

Sehr oft sind die Namen der obersten Reihe nicht gleich in der zwoten Reihe wieder anzubringen, sondern man muß durch Umwege sie stufenweise erreichen. Z. E. 6 Centner kosten 360 Thaler, wie viel Pfenrige kostet ein Quentgen? Wollte man die 6 Centner in Quentgen, und die 360 Thaler in Pfennige, durch eine wiederholte Multiplication verwandlen, so könnte man freylich schon in der zwoten Reihe, die Namen der ersten Reihe erhalten. Allein, wie groß würden nicht die Zahlen seyn, die hiedurch erwachsen würden, und wie viele vergebliche Arbeit und Zeit würde man nicht verschwenden!

Der Hauptsatz eines Exempels ist ein geometrischer Proportionalsatz, dessen viertes Glied man sucht. Im angeführten Exempel liefert die Aufgabe die Glieder des Hauptsatzes. Der Hauptsatz macht immer die beyden obersten Reihen eines Exempels aus. 6 Centner kosten 360 Thaler; wie viel Pfennige kostet ein Quentgen? oder man soll eine Anzahl Pfennige finden, die so

oft

oft in 360 Thaler ſteckt, als 1 Quentgen in 6 Centnern enthalten iſt. Iſt im Ordnen in der oberſten Reihe des Hauptſatzes linker Hand Geld, und rechter Hand Gewicht, ſo muß in der zwoten Reihe linker Hand Gewicht, und rechter Hand Geld kommen. Kurz, können gleich nicht die gleichen Namen der oberſten Reihen in der zwoten Reihe angebracht werden; ſo müſſen doch gleiche Arten gegen einander über ihren Platz erhalten; ſteht in der oberſten Reihe rechter Hand Zeit, Maaß oder Geld, ſo muß in der zwoten Reihe linker Hand Zeit, Maaß oder Geld den Platz erhalten.

1 Pfennig	. . .	1 Quentg.
6 Centn.	. . .	360 Thal.

Die Gleichheit der Namen ergiebt ſich in der Folge von ſelbſt, wenn nur die Centner bis auf Quentgen, die Thaler bis auf Pfennige abgeändert werden. Man ſetzt nämlich 1 Thaler hat 36 Groſchen, 1 Groſchen 8 Pfennige. Die Centner werden auf gleiche Art, bis auf Quentgen abgeändert. Wenn die Namen der oberſten Reihen ſich in der Folge in der gegenſeitigen Columne zeigen, ſo iſt das Exempel richtig geordnet, und in einer Columne finden ſich alsdenn dieſelben Namen, welche ſich in der andern finden.

1 Pfennig	. . .	1 Quent.
6 Centn.	. . .	360 Thaler.
1 Thal.	. . .	36 Groſchen.
1 Groſch.	. . .	8 Pfennige.
100 Pfund	. . .	1 Centn.
32 Loth	. . .	1 Pfund
4 Quentg.	. . .	1 Loth

§. 83.

§. 83.

Ein geordnetes Exempel zu berechnen.

Die Zahlen einer jeden Columne müssen durch einander multiplicirt werden, und das Produkt der ersten oder der Theilcolumne, muß das Produkt der andern Columne dividiren. Der erhaltene Quotient ist das gesuchte Facit, welches den Namen des ersten Gliedes hat.

§. 84.

Durch folgendes wird die Arbeit in den mehresten Fällen sehr vermindert. Die Glieder der Theilcolumne stellen Nenner der Brüche, deren Zehler die Glieder der Multiplications-Columne sind, vor; oder welches einerley ist, die Glieder der Theilcolumne sind Divisoren, welche die Glieder der zwoten Columne dividiren. Es sind harmonische Glieder einer geometrischen Proportion (§. 66.) Da nun die Richtigkeit des Resultats nicht gestöhrt wird, wenn man die harmonischen Glieder einer geometrischen Proportion, durch eine gleiche Division verkleinert; so bleibt auch hier das gesuchte Resultat richtig, wenn man irgend ein Glied der einen Columne, und irgend ein Glied der andern Columne, durch eine Zahl, welche in beyde Glieder aufgeht, dividirt, und statt der Zahlen nur ihre Quotienten behält. Durch dis Verfahren wird oft das weitläuftigste Exempel durch wenige Ziffern berechnet.

Weil aber eine 1, wenn sie allein steht, in der Multiplication und Division nichts verändert; so kann man alle diese Einen wegstreichen, oder wenn beym Aufheben die Quotienten 1 sind; so braucht man sie nicht nieder zu schreiben. Die geltenden Zahlen des Exempels im 82sten §. sind:

a) Die

	1	
	6 . .	360
a)	100 . .	36
	32 . .	8
	4	

Die 0 in 360 gegen die letzte 0 in 100 weggestrichen, denn dis ist eine gleiche Division durch 10. Die 4 und 8 durch 4 dividirt, giebt in der ersten Columne den Quotienten 1, welche nicht hingeschrieben wird, in der andern Columne den Quot. 2. Nun sind die beygesetzten Zahlen b) geblieben.

	6	36
b)	10	36
	32	2

Die 6 der ersten Col. gegen 36 der andern durch 6 dividirt, schafft die 6 weg, und aus 36 wird 6, die 2 und 10 durch 2 dividirt, schafft die 2 weg, und aus 10 wird 5. Es bleiben über die Zahlen c)

c)	32	6
	5	36

Die 32 und 36 beyde durch 4 dividirt, giebt die Quotienten 8 und 9, diese 8, und die 6 der andern Col. durch 2 dividirt, giebt die Quotienten 4 und 3.

	75	9
d)	4	3
	20	27

Fac. $\frac{27}{20}$ ist $1\frac{7}{20}$

Nun hat man die Col. d) in welchen sich in beyden Columnen keine Zahlen mehr finden, die sich durch irgend eine Zahl ohne Rest dividiren lassen. Die Zahlen einer jeden Col. multiplicire man durch einander, die Produkte sind 20 und 27.

Das Produkt der Theil-Columne setze man immer unter das Produkt der zweyten Columne; ist nun das Produkt der Theil-Columne kleiner als das Produkt der andern Columne, so kann und muß die Division des Produkts der zweyten Columne durchs Produkt der ersten geschehen. Der gefundene Quotient ist das gesuchte Facit. 1 Quentg. kostet in obiger Aufgabe $1\frac{7}{20}$ Pfennige.

Ist

Ist das Produkt der Theil-Columne gröſſer, als das Prod. der andern Columne, so kann die Division nicht wirklich geschehen, und das Facit ist ein Bruch.

Im Verkleinern der Glieder des Exempels bin ich deswegen so weitläuftig gewesen, damit ohne Verwirrung gezeigt werden konnte, wie die Verkleinerung eigentlich geschehe. Man darf aber nur in der Anwendung die Zahlen wegstreichen, und ihre Quotienten zur Seite schreiben, und das Verkleinern so lange fortsetzen, bis sich in beyden Columnen keine Zahl mehr ohne Rest theilen läßt.

§. 85.

Bleibt in einer der Columnen nach verrichteter Verkleinerung eine 1, oder verschiedene Einen, in verschiedenen Gliedern, oder nichts über; so ist in diesen dreyen Fällen das Produkt aus derselben Columne immer 1.

Warum? daß in einer Columne nichts überbleibt rühret daher, weil man alle Glieder derselben durchs Dividiren gänzlich vernichtet hat. Wenn aber eine Zahl, z. E. 4 vernichtet wird, so geschieht es dadurch, daß man sie durch 4 dividirt; hier erhält man aber den Quotienten 1, welcher nur nicht hingeschrieben wird. Das Produkt aber von hundert Einen ist nicht mehr als 1.

§. 86.

Wenn daher in der Theil-Columne nichts, oder blos 1 oder etliche 1 überbleiben, und das Produkt der andern wäre 8, so wäre das Facit $\frac{8}{1}$ oder 8 ganze. Wäre 8 das Produkt der Theil-Columne und das Produkt der zwoten 1; so würde das Facit $\frac{1}{8}$ seyn. Bleibt nach geschehener Verkleinerung in beyden Col. nichts, oder blos etliche Einen, so ist das Facit $\frac{1}{1}$ oder 1.

§. 87.

§. 87.

Befinden sich Brüche unter den Gliedern der Aufgabe, so streiche man ihre Nenner aus der Columne, wo sie stehen, weg, und schreibe sie in die andere Columne. Der Grund dieses Verfahrens wird in der Folge gezeigt.

§. 88.

Zeigen sich unter den Gliedern ganze Zahlen, an welchen Brüche hangen, so multiplicire man die ganze Zahl durch den Nenner des Bruchs, und addire zum Produkte den Zehler. Dis Resultat bleibt in derselben Columne, der Nenner aber wird in die andere Columne geworfen.

§. 89.

Um das bisher gesagte leichter übersehen zu können, will ich folgende Regeln daraus herleiten.

1) Man setze in der obersten Reihe die ganze Frage, das ist: was man vermöge der Aufgabe wissen will, und zwar den Namen der Antwort ins erste Glied. Dis erste Glied bezeichne man mit dem Buchstaben r, anzudeuten, daß diese erste Columne die andere theile.

2) Weil in beyden Columnen gleiche Namen seyn müssen, so schreibe man in die zwote Reihe die Glieder so, daß der Name, welcher in der obersten Reihe rechter Hand steht, in der zwoten linker Hand seinen Platz erhalte. Z. E. wieviel Thaler bekömmt jemand in einem Tage, wenn er in 365 Tagen 1000 Thal. bekömmt?

r	Thal.	. . .	1 Tage
365	Tagen	. . .	1000 Thal.

3) Sind aber in der Aufgabe keine gleiche Namen enthalten; so müssen sie durch bekannte Verhältnisse ergänzt werden. Z. E. wieviel Groschen bekömmt jemand

mand in einem Tage, wenn er in 20 Jahren 480 Louisd'or bekömmt? 1 Gr. . . 1 Tage
20 Jahr . . 480 Ld'r
365 Tage . . 1 Jahr
1 Ld'r . . 5 Thal.
1 Thal. . . 36 Gr.

4) Wenn sich in beyden Columnen Glieder befinden, die sich durch irgend eine Zahl ohne Rest dividiren lassen, so dividire man sie, und behalte statt der Glieder ihre Quotienten. Nach geschehener Verkleinerung blieb in der Theil-Columne dieses Exempels 73, in der andern 24 und 36. Wenn man aber auch das Verkleinern der Glieder nicht unternimmt, so wird das Facit eben so richtig, nur die Arbeit ist weit beschwerlicher und weitläuftiger.

5) Nach verrichteter Verkleinerung multiplicire man die überbliebenen Zahlen einer jeden Columne durch einander, die Theil-Columne hat 73, das Produkt der andern ist 864.

6) Durch das Produkt der Theil-Columne dividire man das Prod. der andern Columne. Der Quotient ist das gesuchte Facit, welches den Namen des ersten Gliedes enthält. Der Mann des obigen Exempels hat in einem Tage $11\frac{61}{73}$ Groschen Einnahme.

Ist aber das Produkt der Theil-Columne grösser, als das Produkt der andern Columne; so bleibt das Facit ein Bruch.

7) Sind Brüche unter den Gliedern der Aufgabe, so lasse man die Zehler an ihrem Orte, die Nenner aber werfe man in die andere Columne. Die unreinen Brüche mache man zu reinen Brüchen, und werfe blos die Nenner in die andere Columne.

8) Bleibt nach verrichteter Verkleinerung in einer Columne nichts, oder 1, oder etliche Einen in verschiedenen Gliedern über; so ist das Prod. dieser Col. 1.

Was

Was etwan noch zu bemerken wäre, läßt sich bey den Exempeln selbst anzeigen.

§. 90.

Weil sowohl in der Lehre von den Brüchen, als auch in der Kettenregel so vieles darauf ankömmt, ob eine Zahl sich ohne Rest theilen lasse, und durch welche Zahl sie sich theilen lasse; so will ich die brauchbarsten Merkmale, dieses zu erkennen, angeben.

Es lassen sich ohne Rest theilen:

Durch 2, alle Zahlen deren letzte Ziffer eben ist. 7716, 314.

Durch 3, alle Zahlen deren Queersumme in 3 aufgeht. Die Queersumme aber ist, wenn die Ziffern einer Zahl, ohne auf ihren Rang zu sehen, zusammen addirt werden. Z. E. 354. Die Summe dieser Ziffern ist 12, weil sich nun 12 durch 3 ohne Rest theilen läßt, so läßt sich auch 354 ohne Rest durch 3 theilen, so auch 7752, 435, 42.

Durch 4, alle Zahlen, deren zwo letzte Ziffern in 4 aufgehen. Z. E. 916, 324, 71780, 336.

Durch 5, alle Zahlen, deren letzte Ziffer 5 oder 0 ist. 730, 315.

Durch 6, alle Zahlen, deren Queersumme in 3 aufgeht, und deren letzte Ziffer dabey eben ist. 756, 1122, 210, 90.

Die Merkmale welche man hat, um die Eigenschaften einer Zahl, die durch 7 theilbar ist, zu bestimmen, sind weitläuftiger, als wenn die Division durch 7 wirklich angestellet wird.

Durch 8, alle Zahlen, deren drey letzte Ziffern in 8 aufgehen, 357200, 63536.

Durch 9, alle Zahlen, deren Queersumme durch 9 aufgeht, 66321, 7992.

Durch 10, alle Zahlen, deren letzte Ziffer 0 ist, 770, 50.

Durch 11, alle Zahlen, die aus zwo gleichen Ziffern bestehen, 33, 77, 22, 55, wie auch alle Zahlen von 3 Ziffern, deren mittelste Ziffer so groß ist als die Summe der beyden äußersten, 583, 231, 198.

Durch 25, alle Zahlen, die sich mit 25, oder die sich mit zwo oder mehr Nullen endigen, 725, 3300, 11425, 13000.

§. 91.

Einfache Aufgaben sind solche Aufgaben, in welchen die Frage nur aus zwey Theilen bestehet. Z. E. wieviel Gulden sind 12 Thaler? In verbundenen Aufgaben hingegen, bestehet die Frage aus mehr als zwey Theilen. Z. E. wieviel Thaler Zinse geben 75 Thaler Capital in 7 Monaten? Man nennet sie deswegen verbundene Aufgaben, weil verschiedene Umstände zusammen genommen, etwas würken sollen. Nicht allein die Größe des Capitals, sondern das Capital mit einer gewissen Zeit, bestimmt die Zinse.

§. 92.

Einige einfache Aufgaben zur Uebung.

Weil die Lehre von den Brüchen noch nicht abgehandelt ist, so ist es deswegen nothwendig etwas weniges von den Brüchen hier zu sagen, damit man in der Auflösung dieser Aufgaben keinen Anstoß finden möge.

Wenn man den Nenner und Zehler eines Bruchs durch eine Zahl dividirt: so wird der Werth desselben nicht verändert, ob der Bruch gleich in einer kleinern Gestalt erscheint.

Besteht eine Größe aus zwey Theilen, z. E. aus Thalern und Groschen, aus Pfunden und Lothen: so drückt man dadurch die kleinere Sorte, in einem Bruch der größern Sorte aus, daß man dieser kleinern Sorte die Theile der größern zum Nenner giebt. Läßt sich

alsdenn

alsdenn der Bruch durch eine gleiche Division am Nenner und Zehler verkleinern; so thue man es z. E. 2 Thaler 16 Gr. ist $2\frac{16}{36}$ Thaler, oder $2\frac{4}{9}$ Thal. 3 Pfund 4 Loth ist $3\frac{4}{32}$ Pfund ist $3\frac{1}{8}$ Pfund. 3 Wochen 5 Tage ist $3\frac{5}{7}$ Wochen.

Solche Brüche, welche mit ganzen Zahlen zusammen hängen, werden immer durch unächte Brüche ausgedrückt. Dieses geschiehet dadurch, daß man die ganze Zohl durch den Nenner multiplicirt, zum Produkte den Zehler addirt; die Summe ist der Zehler des neuen Bruchs, dessen Nenner der alte Nenner ist.

1) Wieviel Thaler kosten $\frac{5}{8}$ Pfund, wenn $\frac{3}{4}$ Pfund 1 Thal. 18 Gr. kosten?

1 Thal. . . $\frac{5}{8}$ Pfund
$\frac{3}{4}$ Pf. . . $1\frac{1}{2}$ Thal. Fac. $1\frac{1}{4}$ Thal.

2) Der vierte Theil von dem Vermögen eines Mannes ist 21000 Thaler; wieviel ist $\frac{5}{7}$ des Vermögens?

1 Thal. . . $\frac{5}{7}$
$\frac{1}{4}$ . . 21000 Thal. Fac. 60000 Thal.

3) Wieviel Thaler sind 377 Gulden?
1 Thal. . . 377 Guld.
3 Guld. . . 2 Thal. Fac. $251\frac{1}{3}$ Thal.

4) Wie groß ist das Capital, welches in einem Jahre 7 Thal. 9 Gr. Zinse bringet; wenn 100 Thal. 4 Thal. bringen?
1 Thal. Cap. . . $7\frac{1}{4}$ Thal. Zinse
4 Zinse . . 100 Cap. Fac. $181\frac{1}{4}$ Thal.

5) Wieviel Thal. Zinse bringen 2700 Thal. Capit. jährlich, welche zu 4 Procent belegt sind?
1 Thal. Zinse . . 2700 Capit.
100 Capit. . . 4 Zinse Fac. 108 Th.

6) 3 Centner kosten 180 Thaler; wieviel Pfennige kömmt 1 Quentgen?

1 Pfen. . . 1 Quentg.
3 Centn. . . 180 Thal.
1 Thal. . . 36 Gr.
1 Gr. . . 8 Pf.
100 Pfund . . 1 Centn.
32 Loth . . 1 Pfund
4 Quent. . . 1 Loth Fac. $1\frac{7}{20}$ Pfennig.

7) 15 Thal. in Golde sind 14 Thal. in Cassengelde, wieviel betragen 755 Thal. Gold in Cassengelde?

1 Thal. Cassg. . . 755 Thal. Gold
15 Gold . . 14 Cassg. Fac. $704\frac{2}{3}$ Th.

8) Wieviel Pfennige sind $\frac{4}{5}$ Groschen?

1 Pfen. . . $\frac{4}{5}$ Gr.
1 Gr. . . 8 Pfen. Fac. $6\frac{2}{5}$ Pfen.

9) Ein Ochse der 860 Pfund wiegt, kostet $10\frac{1}{2}$ Louisd'or, wieviel kostet 1 Pfund in Cassengelde?

1 Gr. Cassg. . . 1 Pfund
860 Pfund . . $10\frac{1}{2}$ Ldr.
1 Ldr . . $4\frac{2}{3}$ Thal. Cassg.
1 Thal. . . 36 Gr. Fac. $2\frac{11}{215}$ Gr. Cg.

10) Ein Mann besitzt eine Billion Pfennige, er ist aber ein solcher Verschwender, daß er jede Stunde 1000 Thaler von diesem Gelde ausgiebt; in wieviel Jahren wird er die Billion Pfennige ausgegeben haben?

1 Jahr . . 1000000000000 Pfen.
1000 Thal. . . 1 Stunde
36 Gr. . . 1 Thal.
8 Pf. . . 1 Gr.
365 Tage . . 1 Jahr
24 Stund. . 1 Tag. Fac. $396\frac{734}{1971}$ Jahren.

Man

Man ſtreiche erſt die ganzen 1000, und in der andern Columne am Ende drey Nullen weg, weiter läßt ſich das Aufheben durch 4 und 2 verrichten, am Ende bleibt in der Theil-Columne 73. 9. 3. in der andern 781250.

11) Man finde einen Zehler zu dem Nenner 36, ſo daß der Bruch ſo viel als $\frac{2}{3}$ ſey.

Weil der Zehler geſucht wird, ſo ſpricht man: welchen Zehler giebt der Nenner 36, wenn der Nenner 3 den Zehler 2 giebt. Wäre der Zehler gegeben, und man ſuchte den Nenner: ſo würde man ſprechen, welchen Nenner giebt der gegebene Zehler?

1 Zehler . . 36 Nenner
3 Nenner . . 2 Zehler Fac. 24. $\frac{24}{36}$ iſt $\frac{2}{3}$

12) Man ſoll zu dem Nenner 37 einen Zehler finden, ſo daß der Bruch ſo groß als $\frac{3}{4}$ werde.

1 Zehler . . 37 Nenner
4 Nenner . . 3 Zehler Fac. $27\frac{3}{4}$

Das Facit zeigt, daß der Nenner nie 37 ſeyn kann, wenn der Bruch regulair und $\frac{3}{4}$ werth ſeyn ſoll.

13) Iſt der Bruch $\frac{4}{5}$ dem Bruche $\frac{24}{30}$ gleich?

Man thue, als wenn man den Zehler oder den Nenner von einem der Brüche nicht hätte, und ſuche dieſen Nenner oder Zehler, wie gezeigt iſt. Erſcheint im Facitte die ausgelaſſene Zahl, ſo iſt ein Bruch dem andern gleich. Wir wollen den Zehler 24 noch einmal ſuchen.

1 Zehler . . 30 Nenner
5 Nenner . . 4 Zehler Facit 24

Auf dieſe Art findet man, ob ein gefundenes Facit richtig ſey, wenn blos der Bruch anders ausgedruckt iſt, als der angezeigte.

14) Eine Jungfrau soll vermöge eines Testaments $\frac{1}{3}$ des ganzen Vermögens haben, sie erhielte 765 Thal. Ihre Schwester soll $\frac{2}{7}$ des Vermögens bekommen; wie viele Thaler müssen ihr ausgezahlet werden?

1 Thal. . . $\frac{2}{7}$
$\frac{1}{3}$ . . 765 Thal. Fac. 648 Thal.

15) Wie groß ist das ganze Vermögen des Mannes der vorigen Aufgabe?

Da die Größe eines Theils des Vermögens bekannt ist, so nimmt man das ganze Vermögen als 1 an, und findet aus einem bekannten Theile die Größe von 1 oder vom Ganzen.

1 Thal. . . 1
$\frac{1}{3}$ . . 765 Thal. Fac. 2295 Thal.

16) Man soll mit 385 Pfund Butter 2 Jahr und 8 Monat auskommen; wieviel Loth kan jeden Tag verbraucht werden?

1 Loth . . 1 Tage
$2\frac{2}{3}$ Jahr . . 385 Pfund
1 Pf. . . 32 Loth
365 Tage . . 1 Jahr Fac. $12\frac{48}{73}$ Loth.

17) Wieviel Quentgen sind diese $\frac{48}{73}$ Loth?

1 Quentg. . . $\frac{48}{73}$ Loth
1 Loth . . 4 Quentg. Fac. $2\frac{46}{73}$ Quentg.

18) Ein Ochshoft Wein hat 6 Anker, 1 Anker 40 Boutellen; nun kostet ein Ochshoft Wein 93 Thal. in Golde, wieviel Groschen kostet 1 Boutelle in Cassengelde?

1 Gr.

1 Gr. Cassg. . : 1 Bout
1 Ochsh. . . 93 Thal. Gold
6 Anker . . 1 Ochsh.
40 Bout. . . 1 Anker
1 Thal. . . 36 Gr.
15 Gold . . 14 Cassg. Fac. $13\frac{1}{10}$ Gr. Cg.

19) Wieviel Groschen Cassengeld, ist $\frac{3}{7}$ Thal. Gold?
1 Gr. Cassg. . . $\frac{3}{7}$ Thal. Gold
1 Thal. . . 36 Gr.
15 Gold . . 14 Cassg. Fac. 14^2 Gr. Cg.

20) Wieviel Pfennige sind $\frac{2}{7}$ Groschen?
1 Pf. . . $\frac{2}{7}$ Gr.
1 Gr. . . 8 Pf. Fac. $3\frac{1}{7}$ Pf.

Das 8te, 17te, 19te und 20te Exempel enthält solche Aufgaben, deren Auflösung man die Resolution der Brüche nennet. Das Gegentheil von der Resolution nennet man die Reduction der Brüche. Z. E. was ist 6 Pfennige für ein Theil vom Thaler?

1 Thal. . . 6 Pf.
8 Pf. . . 1 Gr.
36 Gr. . . 1 Thal. Fac. $\frac{1}{48}$ Thal.

Was 3 Quentg. für ein Theil vom Pfunde?

1 Pfund . . 3 Quentg.
4 Quent. . . 1 Loth
32 Loth . . 1 Pfund Fac. $\frac{3}{128}$ Pfund

21) Man legt jeden Tag $1\frac{1}{2}$ Pfennig bey; wieviel Thaler hat man in 10 Jahren?

1 Thal. . . 10 Jahren
1 Tage . . $1\frac{1}{2}$ Pf.
36 Gr. . . 1 Thal.
8 Pf. . . 1 Gr.
1 Jahr . . 365 Tage Fac. $19\frac{1}{96}$ Thal.

22) Ein Loth 12 löthig kostet 21 Gr. wieviel kostet 1 Loth 15 löthig?

1 Gr. . . 15 löthig
12 löthig . . 21 Gr. Fac. $26\frac{1}{4}$ Gr.

23) 35 Mädgen spinnen die Woche 60 Stück Garn; wieviel müssen 2 Mädgen in dieser Zeit spinnen?

1 Stück . . 2 Mädgen
35 Mädg. . . 60 Stück Fac. $3\frac{3}{7}$ Stück

24) Wieviel Stück Ducaten sind 34 Louisd'or; den Ld'r zu 5 Thaler, den Ducaten zu 2 Thal. 30 Gr. gerechnet?

1 Ducat. . . 34 Ld'r
1 Ld'r . . 5 Thal.
$\frac{5}{6}$ Thal. . . 1 Ducat. Fac. 60 Ducat.

Sechstes Kapitel.

Von den Brüchen.

I. Abschnitt.

Von den Eigenschaften der Brüche.

Ob gleich verschiedenes von dem was hier folgt, vorhin zerstreut hat gesagt werden müssen, so ist dennoch deswegen nothwendig, solches hier zu wiederhohlen, damit man die ganze Lehre von den Brüchen im Zusammenhange bey einander finde.

§. 93.

Ein Bruch ist: wenn ein Ganzes in so viel gleiche Theile getheilt ist, als der Nenner sagt, und man hat so viel von diesen Theilen, als der Zehler sagt,

i. E.

z. E. $\frac{2}{3}$ Thaler, zwey drittel Thaler heißt: 1 Thaler ist in drey gleiche Theile getheilt, von welchen Theilen man zwey hat. Ein Bruch ist also ein Theil von einem Ganzen.

Zu einem Bruche gehören daher zwo Zahlen, eine, welche sagt, in wie viele Theile ein Ganzes getheilt sey, dieser heißt der **Nenner**, die andere Zahl, welche anzeigt, wieviel von diesen Theilen da sind, heißt der **Zehler**. Der Zehler hat den Platz über der Queerlinie, der Nenner unter dieser Linie.

§. 94.

Der Nenner ist immer ein Ganzes. Er ist 1 Thaler, 1 Pfund, 1 Jahr, wenn der Bruch Theile vom Thaler, vom Pfunde, vom Jahre ausdrückt.

Man pflegt ein Jahr in 12 Monate, in 52 Wochen, in 365 Tage zu theilen. In diesem Falle drückt der Zehler Monate, Wochen, und Tage aus, nachdem der Nenner 12, 52, oder 365 ist. Z. E. $\frac{7}{12}$ Jahr sind 7 Monate, denn ein Jahr ist in 12 Monate getheilt, von welchen 7 Monate da sind. $\frac{5}{8}$ Groschen sind 5 Pfennig, weil ein Groschen aus 8 Pfennigen besteht; und 13 Gr. sind $\frac{13}{36}$ Thaler, 9 Loth sind $\frac{9}{32}$ Pfund. Man sieht hieraus, daß man in einem Bruche blos den Zehler, nicht den Nenner habe.

§. 95.

Oft drückt ein Nenner die Theile eines Ganzen nicht in den gewöhnlichen Theilen aus, z. E. $\frac{7}{11}$ Thal. heißt: ein Thaler ist in 11 Theile getheilt, von welchen Theilen 7 da sind; 11 aber ist die gewöhnliche Eintheilung eines Thalers nicht.

Um den Werth eines solchen Bruchs durch die gewöhnlichen Theile auszudrücken, oder zu bestimmen,

wieviel Groschen $\frac{7}{11}$ Thaler sind, bedient man sich der Kettenregel.

1 Gr. . . $\frac{7}{11}$ Thal.
1 Thal. . . 36 Gr.

Das Facit sagt: daß der Bruch $22\frac{10}{11}$ Gr. sey. Auf gleiche Art findet man weiter, wieviel Pfennige $\frac{10}{11}$ Gr. ausmachen. So ist der Bruch $\frac{7}{11}$ Thaler durch die gewöhnlichen Theile eines Thalers 22 Groschen $7\frac{3}{11}$ Gr. ausgedrückt.

§. 96.

Aus der gegebenen Erklärung eines Bruchs, daß nämlich ein Bruch ist: wenn ein Ganzes in so viel gleiche Theile getheilt ist, als der Nenner sagt, und man von diesen Theilen so viel hat, als der Zehler sagt, folgt, daß wenn Nenner und Zehler eines Bruchs gleich groß ist, der Bruch ein Ganzes sey; $\frac{8}{8}$ Gr. ist 1 Gr. Denn man hat in dem Zehler alle Theile eines Ganzen, folglich ein Ganzes. Ist der Zehler kleiner als der Nenner, so ist der Bruch weniger als ein Ganzes, z. E. $\frac{5}{8}$ denn man hat in dem Zehler nicht alle Theile des Ganzen. Der Bruch aber ist mehr als ein Ganzes, wenn der Zehler den Nenner an Größe übertrift $\frac{7}{7}$, denn man hat im Zehler mehr, als alle Theile eines Ganzen.

§. 97.

Solche Brüche, die mehr als ein Ganzes sind, nennet man **unächte Brüche**. Man kann sie zwar als ächte Brüche bearbeiten; am Ende der Rechnung aber, müssen die Ganzen, welche in demselben enthalten sind, abgesondert werden. **Unreine Brüche** sind solche Brüche, die durch die Addition mit ganzen Zahlen verbunden sind $2\frac{1}{2}$, $17\frac{5}{8}$, $3\frac{4}{7}$, 3 und $\frac{4}{7}$.

§. 98.

§. 98.

Die Größe eines Bruchs, kömmt allein auf das Verhältniß seines Zehlers, gegen seinen Nenner an. $\frac{1}{2}$ ist größer als $\frac{22}{100}$. Je größer der Zehler gegen den Nenner ist, desto größer ist der Bruch; je größer der Nenner gegen den Zehler ist, um desto kleiner ist der Bruch.

Verkleinert man daher nur den Zehler eines Bruchs, so verkleinert man den Bruch; verkleinert man nur den Nenner, so vergrößert man ihn. Denn im ersten Falle, veringert man im Bruche dasjenige, was man hat, nämlich den Zehler; im zweyten Falle theilt man ein Ganzes in weniger Theile, als es getheilt war, welche Theile dadurch größer werden. Von diesen größer gewordenen Theilen, erhält der Zehler eben so viele Theile, als er zuvor von den kleinern bekam. Die Mathematiker pflegen daher eine unendlich kleine Größe, durch $\frac{0}{1}$; eine unendlich große Größe, durch $\frac{1}{0}$ auszudrücken.

§. 99.

Ein jeder Bruch ist ein Quotient. Der Zehler ist der Dividendus, der Nenner der Divisor, und der Werth des Bruchs ist dem gleich, was durch die Division gefunden wird.

Beweis.

$\frac{2}{3}$ Thaler als einen Quotienten betrachtet, heißt: 2 Thaler sind in drey Theile getheilt, von welchen ein Theil da ist; der Quotient ist also 1 Gulden. Siehet man $\frac{2}{3}$ als einen Bruch an, so sagt man: 1 Thaler ist in drey Theile getheilt, von welchen Theilen zwey Theile da sind. Diese zwey Theile betragen ebenfalls einen Gulden. So ist in allen Fällen der Werth eines Bruchs dem Quotienten gleich, welcher gefunden wird, wenn

wenn der Zehler durch den Nenner dividirt worden. Z. E. $8 : 7 = \frac{8}{7}$.

§. 100.

Es ist daher auch diese Erklärung eines Bruchs: der Zehler ist durch seinen Nenner dividirt, richtig. Ein jeder Nenner dividirt daher seinen Zehler. $\frac{4}{5}$ heißt: 4 Ganze sind durch 5 Ganze dividirt.

§. 101.

Auch die unächten Brüche machen hier keine Ausnahme. $\frac{5}{2}$ ist so viel, als 5 sind durch 2 dividirt. Man kann wie es die Umstände fordern statt $\frac{5}{2}$, $2\frac{1}{2}$, und statt $2\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$ schreiben. Denn eine und dieselbe Sache ist nur verschieden ausgedrückt. Beyde Ausdrücke aber sind Quotienten. $2\frac{1}{2}$ ist der gefundene Quotient, wenn die Division des Zehlers, durch den Nenner wirklich verrichtet wird. $\frac{5}{2}$ ist derselbe Quotient, sein Werth ist $2\frac{1}{2}$. Diese verschiedenen Ausdrücke, sind sich so gleich, wie die Hälfte von 4, 2 gleich ist, das ist $\frac{4}{2}$ ist 2.

§. 102.

Hieraus folgt: daß, wenn der Nenner eines Bruchs 1 ist, alsdenn die Einheiten des Zehlers ganze Einheiten sind. Da es gegentheils dividirte Einheiten sind, wenn der Nenner mehr als 1 ist. Z. E. $\frac{24}{1}$ Thal. sind 24 Thaler. Hingegen $\frac{24}{2}$ Thal. sind 12 Thaler. Denn man verrichte im ersten Falle die Division des Zehlers, durch den Nenner 1; so wird der gefundene Quotient dem Zehler gleich seyn.

Man kann daher einer jeden ganzen Zahl, die Form eines Bruchs geben, ohne daß ihr Werth dadurch verändert wird, wenn man der ganzen Zahl eine 1 zum Nenner giebt. Durch dis kleine Mittel werden in der Folge viele Regeln erspahrt.

§. 103.

§. 103.

Weil man in einem Bruche nur den Zehler, nicht den Nenner hat; so folgt, daß wenn Brüche addirt, subtrahirt, multiplicirt oder dividirt werden sollen, dieses eigentlich blos am Zehler geschehen müsse, der Nenner aber unverändert bleibt. Denn wenn ich in einem Bruche dasjenige, was ich habe, nämlich den Zehler, durch Addiren oder Multipliciren vermehre, so vergrößere ich ja den Bruch. Wenn ich hingegen den Zehler, welchen ich in einem Bruche habe, durch Subtrahiren oder Dividiren verkleinere, so verkleinere ich den Bruch. Der Nenner eines Bruchs zeigt nur an, in wieviele Theile ein Ganzes getheilt sey; das Ganze aber erhält dadurch, daß man den Zehler verändert, weder mehr noch weniger Theile. 5 Groschen z. E. sind $\frac{5}{36}$ Thaler. Man mag diese 5 Groschen so oft nehmen, oder in so viele Theile theilen als man will, so wird dadurch 1 Thaler weder mehr, noch weniger, als 36 Groschen bekommen.

Da aber das Verhältniß zwischen Zehler und Nenner aufgehoben wird, wenn man den Nenner verändert: so kann man auch, aber blos um des Zehlers willen, wie die Folge zeigen wird, den Nenner regelmäßig verändern.

§. 104.

Wenn man den Nenner eines Bruchs durch eine Zahl multiplicirt, und den Zehler unverändert läßt: so wird der Zehler, mithin der Bruch durch diese Multiplication dividirt.

Beweis.

Durch die Multiplication des Nenners wird ein Ganzes in mehr, folglich in kleinere Theile getheilt; von diesen kleiner gewordenen Theilen, erhält der Zehler

ler nicht mehr Theile, als er zuvor von den größern hatte. Es soll jemand $\frac{3}{4}$ Ellen Band haben, multiplicirt man den Nenner durch 2, so bekömmt er nur $\frac{3}{8}$ Ellen.

§. 105.

Wenn man den Nenner eines Bruchs durch eine Zahl dividirt, und den Zehler unverändert läßt; so wird der Zehler, mithin der Bruch, durch diese Division multiplicirt.

Beweis.

Die Division des Nenners giebt dem Ganzen weniger, folglich größere Theile. Von diesen größer gewordenen Theilen fordert der Zehler eben so viele Theile, als er zuvor von den kleinern forderte. Dividirt man in dem Bruche $\frac{3}{4}$ den Nenner 4 durch 2, so wird der neue Bruch $\frac{3}{2}$ das ist $1\frac{1}{2}$, welches zweymal so viel als $\frac{3}{4}$ ist.

Man sieht hieraus von selbst, daß einerley heraus kommen müsse, wenn man nur den Zehler eines Bruchs durch eine Zahl dividirt; oder nur den Nenner durch diese Zahl multiplicirt, z. E. in dem Bruche $\frac{4}{7}$ nur den Zehler 4 durch 2 dividirt, giebt $\frac{2}{7}$, oder nur 5 durch 2 multiplicirt giebt $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{10}$ aber ist gleich $\frac{2}{5}$.

Ueberhaupt, wenn vom Zehler und Nenner die Rede ist, und eins von beyden wird multiplicirt, so wird das andere dadurch dividirt; wird eins von beyden dividirt, so wird das andere multiplicirt.

§. 106.

Wird beydes, sowol Nenner als Zehler, durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt; so wird der Bruch hierdurch nicht verändert.

Beweis.

Beweis.

Durch die Division des Zehlers, wird der Bruch dividirt. Durch die gleiche Division des Nenners, wird der dividirte Bruch wieder multiplicirt. Eine gleiche Multiplication und Division aber hebt sich auf. (§. 43.) Durch die Multiplication des Zehlers, wird der Bruch so vielmal größer, als er durch die Multiplication des Nenners wieder kleiner wird, welches sich ebenfalls aufhebt.

Dividirt man sowol den Nenner als auch den Zehler eines Bruchs durch den Zehler desselben, so erhält man den Werth des Bruchs ziemlich genau, im kleinsten Ausdrucke. Der Zehler ist immer 1, und der Nenner ist nie um eine Einheit zu klein. Z. E. $\frac{237}{3741}$ ist zwischen $\frac{1}{14}$ und $\frac{1}{15}$. Man bedient sich dieses Mittels, wenn man den Werth eines großen Bruchs ziemlich genau durch die kleinste Zahl bestimmen will.

§. 107.

Wenn man nur den Zehler eines Bruchs durch eine Zahl, welche so groß als der Nenner ist, multiplicirt; so enthält der Bruch nach der Multiplication so viele Ganze, als der alte Zehler Einheiten hat. Z. E. man multiplicire den Zehler des Bruchs $\frac{4}{5}$ durch 5, das Produkt ist $\frac{20}{5}$, welches 4 Ganze sind.

Beweis.

Man kann die Multiplication, welche am Zehler geschehen sollte, dadurch verrichten, daß man den Nenner durch dieselbe Zahl dividire. Weil aber die gegebene Zahl dem Nenner gleich ist; so würde der Quotient, mithin der neue Nenner 1 seyn. Ein Bruch aber, dessen Nenner 1 ist, enthält so viele Ganze, als der Zehler Einheiten hat. Man darf also nur den Nenner

wegstreichen, so ist hiedurch der Bruch durch eine Zahl multiplicirt, welche dem Nenner gleich ist.

II. Abschnitt.

Vom Rechnen mit Brüchen.

§. 108.

Vermöge desjenigen, was von den Brüchen gesagt ist, sieht man sich nunmehro in den Stand gesetzt, die Rechnung mit denselben, welche nun folgt, verstehen zu können.

Wie man bey der Auflösung einer Aufgabe, um ein richtiges Resultat zu erhalten, verfahren müsse, das sagen Regeln. Warum man aber so, und nicht anders verfahren müsse, das sagen sie nicht. Um dieses einzusehen, muß man das Wesentliche eines Bruchs und seine Eigenschaften kennen. Fehlt diese Kenntniß, so sind die Regeln, wie man mit Brüchen rechnen müsse, eine Sache blos fürs Gedächtniß, nicht für den Verstand. Man wird sich auf die Treue des Gedächtnisses allein verlassen müssen, und oft ungewiß werden, ob dieses oder jenes Verfahren, hier oder dort anzuwenden sey; man wird sich, ohne Gefahr zu irren, keinen Schritt von der Regel entfernen dürfen; ein Zeitraum der ohne Uebung verfließt, wird das blos auswendig erlernte, dem Gedächtnisse zu leicht wieder entziehen, und hat das Gedächtniß etwas verloren, wie will man ohne einen neuen Unterricht zu erhalten, das Verlorne wieder finden, da man die Quellen nicht kennet, aus welchen die Regeln entsprungen sind?

Die Rechnung mit Brüchen ist so weitläuftig und schwer nicht, wie sie zuweilen vorgetragen wird. Ihr ganzer Umfang fasset nur zehn Aufgaben in sich, welche hier folgen.

§. 109.

§. 109.

Erste Aufgabe.

Einen unreinen Bruch in einen reinen Bruch zu verwandeln.

Man multiplicire die ganze Zahl durch den Nenner des Bruchs und addire zum Produkte den Zehler. Diese Summe ist der Zehler des gesuchten Bruchs, dessen Nenner der alte Nenner ist. Z. E. $3\frac{3}{4}$ ist $\frac{15}{4}$, $10\frac{2}{3}$ ist $\frac{32}{3}$, $2\frac{1}{2}$ ist $\frac{5}{2}$, $24\frac{5}{12}$ ist $\frac{293}{12}$.

Beweis.

Die ganze Zahl multiplicirt man durch den Nenner, und dividirt sie dadurch wieder durch denselben Nenner, daß man dem ganzen Produkte den Multiplicator zum Nenner giebt. Eine gleiche Multiplication und Division aber hebt sich auf.

Der Bruch, welcher also erwächst, ist die Summe von der ganzen Zahl und vom Bruche, folglich ist er immer ein unächter Bruch.

§. 110.

Zweyte Aufgabe.

Die Ganzen finden, welche ein unächter Bruch enthält.

Man dividire den Zehler durch den Nenner, so erhält man in dem Quotienten die gesuchten Ganzen, $\frac{71}{4}$ ist $18\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$ ist $1\frac{1}{4}$, $\frac{369}{3}$ ist 123.

Beweis.

Der gefundene Quotient sagt, wie oft der Nenner in dem Zehler steckt. Da nun der Nenner eines jeden Bruchs immer ein Ganzes ist; so sagt der Quotient, wieviel Ganze in dem Zehler stecken.

§. 111.

Um eine Größe, welche aus zwey Theilen, aus Thalern und Groschen, aus Pfunden und Lothen besteht, in einem unreinen oder auch in einem unächten Bruche ausgedruckt zu erhalten, darf man nur der kleinsten Sorte die gewöhnlichen Theile einer Einheit von der größern Sorte zum Nenner geben, so erhält man beyde Sorten in einem unreinen Bruche. Dieser läßt sich, wie gezeigt ist, leicht in einen unächten Bruch verwandeln. 4 Thal. 7 Gr. ist $4\frac{7}{30}$ Thal. oder $\frac{151}{30}$ Rthl. 6 Pf. 5 Loth ist $6\frac{5}{32}$ Pf. oder $\frac{197}{32}$ Pf.

§. 112.

Wenn eine Zahl durch die andere dividirt werden soll, und man will den Quotienten in einem unächten Bruche haben; so darf man nur den Divisor unter den Dividendus schreiben, und einen Strich zwischen beyde ziehen, so ist die Division verrichtet. Z. E. 375 dividirt durch 97 ist $\frac{375}{97}$.

§. 113.

Dritte Aufgabe.

Einen Bruch ohne Veränderung des Werths kleiner auszudrücken.

Man dividire sowol den Zehler, als auch den Nenner, durch eine beliebige Zahl, welche in beyde aufgeht. Der Quotient des Zehlers ist der neue Zehler, der Quotient des Nenners der neue Nenner. Läßt sich, sowol Nenner als Zehler dieses neuen Bruchs, abermal ohne Rest theilen, so thue man es. Diese Arbeit wiederhohle man so lange, bis Nenner und Zehler durch keine Zahl weiter theilbar sind. Z. E.

$$\frac{64}{560} \mid \overset{4}{\frac{16}{56}} \mid \overset{2}{\frac{8}{28}} / \frac{7}{49} \mid \overset{7}{\frac{1}{7}} \frac{7}{49} \text{ ist } \frac{1}{7}.$$

Beweis.

Beweis.

Durch die Division des Zehlers, wird der Bruch um so viele male kleiner, als er durch die Division des Nenners wieder größer wird.

§. 114.

Vierte Aufgabe.

Brüche, welche verschiedene Nenner haben, ohne Veränderung ihres Werths so auszudrücken, daß alle diese Brüche einerley Nenner erhalten; oder wie man zu sagen pflegt: Brüchen von verschiedener Art einen General-Nenner zu geben.

Weil Addiren ist: Größen von gleicher Art zusammen zehlen; und Subtrahiren: Größen von gleicher Art von einander abziehen; so sieht man leicht, daß Brüche von ungleichen Nennern weder addirt noch subtrahirt werden können, weil Brüche, die ungleiche Nenner haben, Größen von ungleicher Art sind.

§. 115.

Man könnte eine jede beliebige Zahl zum Generalnenner wählen, und alsdenn solche Zehler zum Generalnenner suchen, welche sich zum Generalnenner so verhalten, wie sich die gegebenen Zehler zu ihren Nennern verhalten. Hierdurch wäre der Forderung ein Genüge geschehen. Denn die Größe eines Bruchs kömmt allein aufs Verhältniß des Zehlers zum Nenner an. Da sich nun in den gegebenen Brüchen die Zehler zu ihren Nennern eben so verhalten, wie sich in den gefundenen Brüchen die Zehler zu ihren Nennern verhalten; so wären sich die gegebenen und gefundenen Brüche gleich, z. E. $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ sollen gleiche Nenner erhalten.

28613611

Der Generalnenner mag 4 seyn, um zum Nenner 4, den gehörigen Zehler zu finden, würde man sich der Kettenregel bedienen.

1 Zehl. . . 4 Nen. 1 Z. . . 4 N.
4 Nen. . . 3 Zehl. Fac. 3. 3 N. . 2 Z. Fac. $2\frac{2}{3}$

Der Bruch $\frac{3}{4}$ bliebe in diesem Falle unverändert, statt $\frac{2}{3}$ würde man den unregelmäßigen Bruch $\frac{2\frac{2}{3}}{4}$ erhalten. Es würde nämlich der Zehler selbst ein unreiner Bruch seyn.

§. 116.

Diese unregelmäßigen Brüche werden vermieden, wenn alle gegebene Nenner in dem Generalnenner aufgehen. Zu gegebenen ungleich artigen Brüchen einen General- oder gemeinen Nenner zu finden ist also: **eine Zahl finden, in welcher alle gegebene Nenner aufgehen.**

Man kann unendlich viele Zahlen finden, in welche alle gegebene Nenner aufgehen. Die Arbeit aber wird sehr weitläuftig, wenn die gefundene Zahl aus vielen Ziffern bestehet. Es kömmt also darauf an, die möglichst kleinste Zahl zu finden, in welcher sie alle aufgehen.

§. 117.

In diesem Geschäfte zeigen sich drey Fälle: 1) die gegebenen Nenner haben keinen gemeinschaftlichen Theiler unter sich; z. E. die Nenner mögen seyn 4, 3, 5, 7. Es findet sich keine Zahl, die in zween, oder mehreren von diesen Nennern aufgehen. 2) Oder einige der gegebenen Nenner, haben einen gemeinschaftlichen Divisor, z. E. 12, 5, 8, 7; die Nenner 12 und 8 lassen sich ohne Rest durch 4 dividiren. 3) Oder einer

oder

oder einige der gegebenen Nenner gehen ganz in andere auf; z. E. 2, 6, 4, 5, 12, 15, die Nenner 2, 6, 4, gehen ganz in 12, 5 in 15 auf.

Folgende drey Sätze lehren, wie man in den angezeigten drey Fällen, um den kleinsten Generalnenner zu finden, verfahren müsse.

§. 118.

Alle Zahlen die durch einander multiplicirt sind, gehen in einander auf.

Beweis.

Da das Produkt durch die Multiplication der Factoren erwachsen ist, so muß es sich auch, durch die Division derselben Factoren wieder zerlegen lassen; weil eine gleiche Multiplication und Division sich aufhebt.

§. 119.

Man findet also eine Zahl, in welcher alle gegebene Nenner aufgehen, wenn man alle Nenner durch einander multiplicirt; das Produkt ist der Generalnenner. Z. E. die Nenner mögen seyn 2, 3, 5, der Generalnenner ist 30.

Dieses Verfahren giebt, wenn viele Brüche addirt werden sollen, sehr große Zahlen, und die Arbeit wird beschwerlich. Sind aber unter den gegebenen Nennern etliche, die einen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben, oder die ganz in einander aufgehen; so geben die zwey noch folgenden Sätze Mittel an die Hand, wodurch die Arbeit ungemein vermindert wird.

Finden sich aber unter den gegebenen Nennern keine, die einen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben, oder in einander aufgehen; so ist das Produkt aller Nenner der kleinste möglichste Generalnenner.

§. 120.

2) Wenn verschiedene gegebene Zahlen durch irgend eine Zahl ohne Rest theilbar sind, und man multiplicirt die Quotienten durcheinander, und dieses Produkt durch den Divisor; so gehen alle gegebene Zahlen in dem letzten Produkte auf. Z. E. die Zahlen 16, 12, 8 sind durch die Zahl 4 theilbar. Die Quotienten dieser Zahlen sind 4, 3, 2. Das Produkt dieser Quotienten, nämlich 24, durch den Divisor 4 multiplicirt, giebt das Produkt 96, worinnen die Zahlen 16, 12, 8, aufgehen.

Beweis.

Gehen die Factoren 16, 12, 8, in ihrem Produkte auf, so müssen sie auch in dem Produkte ihrer Quotienten durch den Divisor multiplicirt aufgehen, weil dieses Produkt den gegebenen Zahlen gleich ist. Z. E. 12 dividirt durch 4, giebt den Quotienten 3; 3 multiplicirt durch 4 giebt das Produkt 12 wieder. Nun kann man statt 12, das Produkt 4 durch 3 nehmen, welches 12 macht.

Die Ursache aber, warum das Produkt aus dem Quotienten und dem Divisor, kleiner als das Produkt aus den Zahlen selbst wird, ist, weil der Divisor 4 in jedem Factore enthalten ist, folglich in obigem Falle dreymal multiplicirt, da der Divisor 4 nur einmal gebraucht wird, wenn durch ihn die Quotienten multiplicirt werden.

§. 121.

Sollen daher Brüche, deren Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben, zu gleicher Benennung gebracht werden; so multiplicire man ihre Quotienten durch den Divisor; dieses Produkt ist der Generalnenner. Z. E. die Nenner verschiedener Brüche mögen 20, 26, 12, 8, seyn. Man schreibe die Nen-

ner

ner neben einander, ſetze den Diviſor zur Seite, unter den alten Nennern ſchreibe man die Quotienten, und mache das Produkt; welches der Generalnenner iſt.

$$4)\ \frac{20,\ 16,\ 12,\ 8}{5,\ 4,\ 3,\ 2}$$

Der Generalnenner iſt 480. Hätte man die gegebenen Nenner, in ihrer unveränderten Größe, durch einander multiplicirt; ſo würde der Generalnenner 30720 geworden ſeyn.

§. 122.

3) Wenn eine kleine Zahl in einer größern aufgeht, und dieſe größere Zahl geht in einer dritten Zahl auf; ſo geht auch die kleinere in der dritten Zahl auf; 3 ſteckt zweymal ohne Reſt in 6, da nun 12 aus zweymal 6 oder aus 6 und 6 beſteht, ſo iſt 3 viermal in 6 und 6, oder in 12 ohne Reſt enthalten.

Umgekehrt gilt dieſer Satz nicht. Man kann nicht ſagen, eine kleinere Zahl geht in einer größern auf; da nun die kleinere Zahl in einer dritten aufgeht, ſo geht auch die größere darinnen auf. Denn die größere ſteckt nicht ganz in der kleinern. Z. E. 3 gehet in 6 auf, 3 gehet auch in 9, 15, 21 auf; 6 aber geht in keiner dieſer Zahlen auf.

§. 123.

Da nun einen Generalnenner finden, nichts anders iſt, als eine Zahl finden, in welcher alle gegebene Nenner aufgehen; und, vermöge des dritten Satzes, alle diejenigen gegebenen Nenner, welche in einem der gegebenen Nenner aufgehen, auch gewiß in den Generalnenner aufgehen müſſen: ſo kann man, um einen gemeinen Nenner zu finden, alle die kleinern Nenner, welche in andere aufgehen, zu dieſer Abſicht als unnütz

wegstreichen, z. E. folgende Zahlen mögen Nenner gegebener Brüche seyn, 2, 3, 4, 6, 4, 12. Weil die ersten fünf Zahlen in der Zahl 12 aufgehen; so streiche man sie weg. Der Generalnenner ist also 12. Denn in 12 gehen alle Nenner auf. Hätte man die gegebenen Nenner durch einander multiplicirt; so würde der Generalnenner 6912 geworden seyn.

Man siehet leicht ein, daß oft alle drey gegebene Fälle, in einem Exempel zusammen treffen können. Um nun pünctlich zu zeigen, wie man verfahren müsse, um den kleinsten Generalnenner zu finden, der möglich ist, mögen folgende Zahlen Nenner gegebener Brüche seyn.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16, 12

2, 3, 4, 6 streiche man vermöge des dritten Satzes weg, weil diese Zahlen in 12 aufgehen; weil 5 in 10 und 8 in 16 aufgeht: so streiche man ebenfalls 5 und 8 weg, weil 12 zweymal da ist, so streiche man sie einmal weg. Denn in der Zahl, in welcher eine Zwölf aufgeht, gehet auch die andere auf. Nun sind noch die Nenner 7, 9, 10, 12, 16 übrig. Weil man nun sieht, daß verschiedene unter ihnen einen gemeinschaftlichen Theiler haben; so schreibe man sie neben einander, und setze vermöge des zweyten Satzes, den Divisor, welcher in mehr als in einem von diesen Nennern aufgeht, zur Seite; verrichte die Division, und setze statt der Nenner ihre Quotienten unter der Linie. Ist der Quotient 1, so ist es unnöthig solche hinzuschreiben, weil 1 nicht multiplicirt. Dis Verfahren wiederhohle man so oft, als sich Zahlen finden, die einen gemeinschaftlichen Divisor unter sich haben.

2) 7, 9, 10, 12, 16
3) 7, 9, 5, 6, 8
2) 7, 3, 5, 2, 8
7, 3, 5, 4

Weil

Weil nun die Zahlen 7, 3, 5, 4 keinen gemeinschaftlichen Divisor mehr unter sich haben, so ist ihr Produkt mit dem Produkte der Divisoren 2, 3, 2, multiplicirt, nämlich 5040, der kleinste Generalnenner, in welchem die gegebenen zwölf Nenner aufgehen. Die zur Seite geschriebenen Divisoren sind unveränderliche Zahlen; sie dürfen nicht durch eine gleiche Division verkleinert werden.

Haben die gegebenen Nenner keinen gemeinschaftlichen Divisor, der wenigstens in zweyen Nennern aufgeht; so ist das Produkt aller Nenner der Generalnenner; er wäre von 5, 2, 3, dreyßig.

Folgende Zahlen sind Nenner gegebener Brüche:

2)	6, 64, 12, 2, 100, 5, 3, 4, 8, 9		
3)	3, 32, 6,	50, 5, 3, 2, 4, 9	
2)	32, 2,	50, 5,	2, 4, 3
5)	16,	25, 5,	2, 3
2)	16,	5,	2, 3
	8,	5,	3

Das Produkt der überbliebenen Quotienten durchs Produkt der Divisoren multiplicirt, giebt den kleinsten gemeinen Nenner, nämlich 14400, in welchem die gegebenen zehn Nenner aufgehen.

Der Generalnenner tritt in die Stelle eines jeden der gegebenen Nenner; folglich sollte er im letzten Exempel zehnmal hingeschrieben werden.

§. 124.

Man sieht leicht ein, daß, da die Größe der Nenner in den gegebenen Brüchen verändert ist, auch die Größe ihrer Zehler verändert, und zwar so verändert werden müsse, daß sich die neuen Zehler zum Ge-

neralnenner verhalten, wie sich die alten Zehler zu den alten Nennern verhalten. Widrigen Falles würden die gegebenen Brüche nicht dieselben bleiben. Es müssen aber dieselben Brüche, nur in veränderter Gestalt, seyn.

§. 125.

Zum gefundenen Generalnenner die verhältnismäßigen Zehler zu finden.

1) Man mache drey Columnen, in der ersten Columne schreibe man die gegebenen Brüche. Nun suche man den kleinsten Generalnenner, und schreibe ihn über die zwote Columne. 2) Man dividire die gegebenen Nenner in den Generalnenner, und schreibe die gefundenen Quotienten in die zwote Columne. 3) Mit den Zehlern der gegebenen Brüche, multiplicire man diese Quotienten, und schreibe die Produkte in die dritte Columne. Diese Produkte sind die neuen Zehler, deren jeder den Generalnenner zum Nenner hat.

Die Brüche $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{14}{17}$, sollen zu gleicher Benennung gebracht werden.

Nachdem die Nenner, welche ganz in andere Nenner aufgehen, weggestrichen sind, bleiben über 8, 12, 15,

$$4)\ \frac{8,\ 12,\ 15}{}$$
$$3)\ \frac{2,\ 3,\ 15}{}$$
$$\frac{2\qquad 5}{}$$

Gen. Nenner 120

	120	
$\frac{2}{3}$	40	80
$\frac{3}{4}$	30	90
$\frac{1}{2}$	60	60
$\frac{5}{8}$	15	75
$\frac{1}{4}$	30	30
$\frac{7}{12}$	10	70
$\frac{14}{17}$	8	112

Beweis.

Beweis.

Indem man die neuen Zehler zum Generalnenner sucht, bearbeitet man eigentlich so viele Exempel der Kettenregel, als Brüche da sind. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Bruch $\frac{2}{3}$ wählen. 12 sey der Generalnenner. Wollte man zum Nenner 12 einen Zehler durch die Kettenregel suchen, so daß der Werth desselben $\frac{2}{3}$ sey, so wäre der Satz,

1 Zehl. . . 12 Nenner
3 Nen. . . 2 Zehler

nun wird man nach der Regel den alten Nenner 3, in den gemeinen Nenner 12 dividiren, und den gefundenen Quotienten 4 durch 2 multipliciren, das Produkt 8, würde der Zehler zum Nenner 12 seyn. Ist dis nicht ganz genau das eben gezeigte Verfahren? Man bedient sich nur deswegen der Kettenregel nicht, weil man in der gezeigten Methode den gemeinen Nenner nur einmal zu schreiben nöthig hat.

Wem das Verfahren, die neuen Zehler zum Generalnenner zu finden, entfallen seyn sollte; der darf nur einen Zehler durch die Kettenregel finden, die Ausarbeitung wird ihm ganz genau sagen, wie er handeln müsse.

Wenn der gemeine Nenner aus einer Ziffer besteht; so ist es unnöthig, drey Columnen zu machen. Die gegebenen Nenner kann man leicht und geschwinde in dem gemeinen Nenner im Kopfe dividiren, und den Quotienten durch den alten Zehler multipliciren.

§. 126.

§. 126.

Fünfte Aufgabe.

Brüche zu addiren.

Weil man nur Dinge von gleicher Art zusammen zehlen kann; so bringe man die gegebenen ungleichartigen Brüche, wie gezeigt ist, zu gleicher Benennung, und weil man in den Brüchen nur allein die Zehler, nicht die Nenner, hat (§. 94.): so addire man auch nur die neuen Zehler, nicht die Nenner. Der Summe gebe man den Generalnenner zum Nenner. Dieser Bruch ist die Summe aller gegebenen Brüche. Ist der Zehler der Summe größer als der Nenner, so ziehe man die Ganzen heraus.

72

$\frac{2}{3}$	24	48
$\frac{3}{4}$	18	54
$\frac{5}{6}$	12	60
$\frac{1}{8}$	9	9
$\frac{4}{9}$	8	32

Summe $\frac{203}{72}$ oder $2\frac{59}{72}$

§. 127.

Sind ganze Zahlen vor oder zwischen den gegebenen Brüchen; so schreibe man die ganzen Zahlen sammt den Brüchen in die erste Columne. Weil nun addiren ist: Dinge von gleicher Art zusammen zehlen; so addire man, wie gezeigt ist, die Brüche besonders, und die ganzen Zahlen besonders. Daß die Ganzen, welche in der Summe der Brüche enthalten sind, zu den gegebenen Ganzen gethan werden, versteht sich von selbst.

	120	
$5\frac{3}{4}$	30	90
$4\frac{2}{3}$	40	80
$\frac{4}{5}$	24	96
$2\frac{1}{2}$	60	60
$17\frac{5}{8}$	15	75
$3\ \frac{3}{3^{1}}$	24	72
$31\frac{113}{120}$		$\frac{473}{120}$ oder $3\frac{113}{120}$

	48	
$67\frac{3}{4}$	12	36
$100\frac{1}{2}$	24	24
566-		
$\frac{7}{8}$	6	42
$17\frac{1}{4}$	12	12
$13\frac{5}{16}$	3	15
$3\ \frac{5}{3^{1}2}$	4	20
S. $766\frac{5}{48}$		$\frac{149}{48}$ od. $3\frac{5}{48}$

Sind die Nenner der gegebenen Brüche gleich, so addire man blos die Zehler, und behalte in der Summe den Nenner $\frac{3}{8}$ und $\frac{2}{8}$ ist $\frac{5}{8}$.

§. 128.

Vortheile, welche bey der Addition der Brüche anzuwenden sind.

Unter den Nennern der gegebenen Brüche, die addirt werden sollen, finden sich sehr oft solche Brüche, deren Nenner Primzahlen, das ist, solche Zahlen sind, die durch keine Zahl ohne Rest dividirt werden können, z. E. 7, 13, 11, 31, oder solche Nenner, die zwar ihrer Natur nach theilbar sind, die aber mit keinem andern der gegebenen Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Solche Brüche geben immer einen großen Generalnenner, und die Arbeit wird weitläuftig. Mit Vorsatz habe ich bisher solche Nenner, die sich nicht verkleinern lassen, vermieden.

Wenn sich unter den Nennern, die sich gut aufheben lassen, auch solche Nenner befinden, durch deren Multiplication der Generalnenner zu groß wird; so setze man diese Anfangs bey Seite, als wären sie nicht da. Nachdem man nun die leichtern Brüche zu gleicher Benennung gebracht, addirt, und die ganzen in

denſel-

denselben heraus gezogen hat; addirt man den hier überbliebenen Bruch, zu den unbequemen Brüchen, die Anfangs bey Seite gesetzt wurden. Zwischen folgenden Brüchen, die addirt werden sollen, mag sich der Bruch $\frac{10}{71}$ befinden. Diesen Bruch wollen wir besonders zu der gefundenen Summe der leichtern Brüche addiren.

	13632	
$\frac{149}{192}$	71	10579
$\frac{10}{71}$	192	1920
		$3\frac{12499}{13632}$

	192	
$\frac{9}{64}$	3	27
$\frac{1}{2}$	96	96
$\frac{7}{8}$	24	168
$\frac{3}{4}$	48	144
$\frac{1}{16}$	12	12
$\frac{5}{8}$	24	120
$\frac{2}{3}$	64	128
$\frac{5}{32}$	6	30
Summe		$3\frac{149}{192}$

Hätte man dis Exempel auf die gewöhnliche Art berechnet, so würden alle gegebenen Brüche einen Generalnenner von fünf Ziffern erhalten haben, da man jetzt nur zween Brüche so weitläuftig zu berechnen nöthig gehabt hat. Sehr oft läßt sich der Bruch, welcher aus dem Ganzen überbleibt, verkleinern, oder es entsteht gar kein Bruch. In diesen Fällen wird die Arbeit durch den angezeigten Vortheil, noch mehr vermindert.

§. 129.

Wenn unter den gegebenen Brüchen, viele Brüche von gleichen Nennern sind, so kann man der Mühe, alle gegebenen Brüche unter gleiche Benennung zu bringen, überhoben seyn. Die angehängten Brüche in den Rechnungen, welche von Kaufleuten und Handwerkern übergeben werden, und welche im gemeinen Leben am

häufig-

häufigsten vorfallen, sind von dieser Art. Sie bestehen mehrentheils aus Halben, Dritteln, Virrtheln, und Achteln.

Die Addition fordert 1) daß die Posten, welche addirt werden, von einer Art seyn sollen; 2) daß man nur die Zehler, nicht die Nenner zusammen zehlen solle. Diesen Forderungen kann man in dem angezeigten Falle, ohne einen Generalnenner zu finden, ein Genüge leisten.

Weil alle Viertel, alle Achtel, alle Halbe, und alle Drittel im nachgesetzten Exempel von gleicher Art sind; so wollen wir die Zehler von einer jeden Art in eine besondere Columne tragen, und diese Zehler zusammen addiren. Um aber eine Verwirrung zu vermeiden, wollen wir den Nenner von einer jeden Art über die Columne seiner Zehler schreiben. Die Summe aus den Zehlern, wird alsdenn diesen übergeschriebenen Nenner, zum Nenner haben. Aus der Summe der Brüche einer jeden Columne wollen wir die Ganzen ziehen, und solche zu den Ganzen der übergebenen Rechnung schreiben. Die überbliebenen Brüche können wir leicht im Kopfe, oder auf die gewöhnliche Art addiren.

Folgende Brüche sollen addirt werden,

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{2}{2}$

2	3	4	8
1	1	3	5
1	2	3	7
1	1	3	3
1	2	1	7
1	$\frac{6}{3}$	$\frac{10}{4}$	3
1			5
$\frac{6}{2}$			$\frac{30}{8}$

Ganze aus 2tel . . 3
Ganze aus 3tel . . 2
Ganze aus 4tel . . $2\frac{1}{2}$
Ganze aus 8tel . . $3\frac{3}{4}$
Summe $11\frac{1}{4}$

§. 130

§. 130.

Sechste Aufgabe.

Brüche zu subtrahiren.

Eine größere Zahl kann zwar von einer kleinern nicht subtrahirt werden; von vier Thalern kann man nicht fünf Thaler nehmen; allein ein Theil der kleinern Größe, kann größer, als ein Theil der Größern seyn. Z. E. von $2\frac{1}{4}$ Thal soll $1\frac{3}{4}$ Thaler subtrahirt werden. In diesem Falle wird eine Einheit aus der nächst höhern Ordnuug geborgt. Die Theile dieser Einheit, werden zu dem Theile, der zu klein war, addirt, nun kann der Abzug geschehen. Daß die Nenner der Brüche, welche subtrahirt werden sollen, gleich seyn müssen; daß man nur Brüche von Brüchen, und ganze Zahlen von ganzen Zahlen subtrahiren könne, versteht sich deswegen von selbst; weil subtrahiren ist: Dinge von gleicher Art von einander abziehen. Und weil man in den Brüchen nur die Zehler, nicht die Nenner hat, so verstehet es sich wieder von selbst, daß man nur die Zehler subtrahiren, und den Generalnenner behalten müsse.

§. 131.

Um einen Bruch von einer ganzen Zahl zu subtrahiren, borge man eine Einheit aus der ganzen Zahl, verwandle diese Einheit in einen gleich benahmten Bruch; ziehe von dem Zehler dieses Bruchs, den Zehler des gegebenen Bruchs ab, und behalte den Nenner. Z. E. von 1 Thaler sollen $\frac{7}{10}$ Thaler abgezogen werden. Das ist, von $\frac{10}{10}$ Thaler sollen $\frac{7}{10}$ abgezogen werden, bleibt Rest $\frac{3}{10}$ Thaler; 3 weniger $\frac{3}{7}$, ist 2, und $\frac{7}{7}$ weniger $\frac{3}{7}$, ist Rest $2\frac{4}{7}$.

§. 132.

§. 132.

Es ist kaum nöthig mehreres von der Subtraction der Brüche zu sagen, weil (§. 130.) alle Fälle enthält, Um aber das dort gesagte hier anzuwenden, wollen wir denjenigen Fall zum Exempel wählen, der alle Fälle in sich enthält.

Soll ein unreiner Bruch von einem unreinen Bruche subtrahirt werden; so bringe man die Brüche zu gleicher Benennung, wenn sie ungleich sind. Ist alsdenn der Bruch, welcher abgezogen werden soll, kleiner, als der andere; so kann der Abzug geschehen. Ist er größer, so verwandle man eine Einheit aus den vorstehenden Ganzen, welche Abzug leiden sollen, in einen gleich benamten Bruch, addire ihn zu dem, der zu klein war, und verrichte nun den Abzug. Zuletzt werden auch die Ganzen von dem Ganzen abgezogen. Folgende Exempel werden die Auflösung aller Fälle deutlicher sagen, als Worte:

von $4\frac{3}{4}$ Subt. $2\frac{2}{3}$, ist, von $4\frac{9}{12}$ Subt. $2\frac{8}{12}$, Rest $2\frac{1}{12}$.
von $\frac{3}{4}$ Subt. $\frac{1}{5}$, ist, von $\frac{15}{20}$ Subt. $\frac{4}{20}$, Rest $\frac{11}{20}$.
von $5\frac{1}{4}$ Subt. $2\frac{3}{4}$, ist, von $4\frac{5}{4}$ Subt. $2\frac{3}{4}$, Rest $2\frac{2}{4}$.
von $16\frac{3}{8}$ Subt. $9\frac{2}{3}$, ist von $16\frac{9}{24}$ Subt. $9\frac{16}{24}$, ist, von $15\frac{33}{24}$ Subt. $9\frac{16}{24}$, Rest $6\frac{17}{24}$.

§. 133.

Die Probe der Subtraction in Brüchen, ist wie die Probe in ganzen Zahlen. Man addirt nemlich den gefundenen Rest wieder zu der Größe, welche abgezogen worden, die Summe muß, wenn man recht gerechnet hat, derjenigen Größe gleich seyn, von welcher der Abzug geschehen.

§. 134.

Siebente Aufgabe.

Brüche zu multipliciren.

Durch eine ganze Zahl multipliciren, ist: den Multiplicandus so oft nehmen, als der Multiplicator Einheiten hat. Durch einen Bruch multipliciren, ist: einen solchen Theil vom Multiplicandus nehmen, als der Bruch ein Theil von der Einheit ist. Folglich ist das Produkt, wenn $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{2}$ multiplicirt wird, $\frac{1}{4}$. Denn, wenn ich eine halbe Elle halb nehme, so habe ich eine viertel Elle.

§. 135.

Obgleich die Multiplication mit einem Bruche aus der jetzt gegebenen Erklärung fließet, so ist doch eine genauere Bestimmung nothwendig. Durch einen Bruch multipliciren ist: den Multiplicandus, er sey ein Bruch oder eine ganze Zahl, so oft nehmen, als der Zehler des Multiplicators Einheiten hat, und dis Produkt durch den Nenner desselben dividiren; dieses ist, den Multiplicandus durch den Zehler multipliciren, und das Produkt durch den Nenner dividiren.

Bruch durch Bruch zu multipliciren.

Man multiplicire die Zehler durch einander, und die Nenner durch einander, das Produkt aus den Zehlern, ist der neue Zehler, das Produkt aus den Nennern, der neue Nenner.

$\frac{3}{4}$ mal $\frac{2}{3}$ ist $\frac{6}{12}$ ist $\frac{1}{2}$.
$\frac{3}{5}$ mal $\frac{1}{4}$ ist $\frac{3}{20}$
$\frac{7}{10}$ mal $\frac{3}{4}$ ist $\frac{21}{40}$

Beweis:

Beweis.

Das letzte von diesen Exempeln mag zum Beweise dienen. Durch die Multiplication des Zehlers 7 durch 3, nimmt man den Bruch $\frac{7}{10}$ dreymal. Er soll aber nicht durch 3, sondern nur durch den vierten Theil von 3, durch $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden, man muß also das Produkt $\frac{21}{10}$ wieder durch 4 dividiren. Dieses geschiehet durch die Multiplication des Nenners 10 durch 4. (§. 104.)

§. 136.

Um, so viel wie möglich ist, Regeln zu ersparen, und das gezeigte Verfahren auf alle Fälle geltend zu machen, mache man immer die unreinen Brüche zu unächten Brüchen (§. 109.) Die ganzen Zahlen mache man dadurch zu Brüchen, daß man ihnen 1 zum Nenner giebt (§. 102.). Nun kann man immer auf die eben gezeigte Art, Bruch durch Bruch multipliciren.

4 mal $\frac{5}{6}$, ist $\frac{4}{1}$ mal $\frac{5}{6}$, ist Produkt $\frac{20}{6}$ oder $3\frac{1}{3}$.
$5\frac{1}{2}$ mal $\frac{5}{7}$, ist $\frac{11}{2}$ mal $\frac{5}{7}$, ist Produkt $\frac{55}{14}$ oder $3\frac{13}{14}$.
$3\frac{3}{4}$ mal $2\frac{1}{3}$, ist $\frac{15}{4}$ mal $\frac{7}{3}$, ist Produkt $\frac{105}{12}$ oder $8\frac{3}{4}$.
$6\frac{2}{3}$ mal 7, ist $\frac{20}{3}$ mal $\frac{7}{1}$, ist Produkt $\frac{140}{3}$ oder $46\frac{2}{3}$.
Daß 5 mal $\frac{1}{2}$ so viel, als $\frac{1}{2}$ mal 5 ist, ist (§. 134.) gezeigt worden.

§. 137.

Wenn eine benamte Größe aus zwey Theilen bestehet, z. E. 3 Thal. 6 Gr. 5 Pfund 4 Loth, 3 Jahr 6 Wochen, so ist der Theil, welcher die kleinste Sorte ausdrückt, ein Theil oder ein Bruch von der Einheit der größern Sorte. Man drückt diesen Bruch gehörig aus, wenn man der kleinern Sorte, die Theile einer Einheit der größern Sorte, zum Nenner giebt, und diesen Bruch, wenn es geschehen kann, durch eine

gleiche Division am Nenner und Zehler verkleinert. Statt der gegebenen drey Größen erhält man nun die unreinen Brüche $3\frac{1}{8}$ Thaler, $5\frac{1}{8}$ Pfund, $3\frac{3}{12}$ Jahr. Werden nun diese unreinen Brüche, in unächte verwandelt, so erhält man $\frac{19}{8}$ Thaler, $\frac{41}{8}$ Pfund, $\frac{81}{12}$ Jahr. Sind die Größen, welche aus zweyen Theilen bestehen, also verändert, so werden sie, wie gezeigt ist, multiplicirt. Es ist also auch dieser Fall ein Gegenstand der einzigen Regel, immer Bruch durch Bruch zu multipliciren.

7 Gr. 4 Pf. mal 2 Pfund 8 Loth, ist $7\frac{1}{2}$ mal $2\frac{1}{4}$ Pf. ist $\frac{15}{2}$ mal $\frac{9}{4}$, ist Produkt $\frac{135}{8}$.

3 Thal. 8 Gr. mal 3, ist $3\frac{2}{9}$ Thal. mal $\frac{3}{1}$, ist $\frac{29}{9}$ mal $\frac{3}{1}$, ist Produkt $\frac{87}{9}$ Thaler.

4 Pfund 6 Loth mal $\frac{8}{4}$, ist $4\frac{3}{16}$ mal $\frac{2}{8}$, ist $\frac{67}{16}$ mal $\frac{8}{4}$, ist Produkt $\frac{201}{64}$ Pfund.

§. 138.

Man weis schon, daß man, welchen von den gegebenen Factoren man will, als den Multiplicator annehmen kann; man weis aus (§. 34.) daß der Multiplicator als eine namlose Zahl anzusehen ist. Multiplicirt man daher Gewicht und Geld, und man verlangt im Produkte Geld, so siehet man denjenigen Factor welcher Gewicht ausdrückt, als den namlosen Multiplicator an, soll das Produkt Gewicht seyn, so ist Geld der Multiplicator.

Das Produkt, welches durch die Multiplication mit einem Bruche entstanden ist, ist kleiner, als die Zahl, welche multiplicirt worden.

Beweis.

Beweis.

Durch die Multiplication mit einem Bruche, soll man nur einen Theil vom Multiplicandus nehmen. Eine Zahl durch $\frac{1}{2}$ multipliciren, ist die Hälfte von der Zahl nehmen, oder sie durch 2 dividiren. Durch $\frac{1}{3}$ multipliciren, ist so viel, als durch 3 dividiren, oder $\frac{1}{7}$ von der Zahl nehmen; durch $\frac{2}{3}$ multipliciren ist den Multiplicandus durch 2 multipliciren, und das Produkt durch 3 dividiren.

§. 139.

Die Multiplication der Brüche, kann man sehr bequem durch die Kettenregel verrichten. Der Grund liegt darin, daß durch eine jede Multiplication, die vierte geometrische Proportionalzahl gefunden wird. 1 verhält sich nämlich zu einem der gegebenen Factoren, wie sich der andere Factor zum Produkte verhält. Die Kettenregel liefert ebenfalls die vierte Proportionalzahl, zu drey gegebenen.

§. 140.

Der Gebrauch der Kettenregel vermehrt bey der Multiplication nie die Arbeit, sehr oft aber, besonders bey großen Brüchen, vermindert sie solche. Wenn man die Zahlen verschiedener Columnen, welche eine gleiche Division leiden, gehörig gegen einander verkleinert, so erhält man immer, wenn man durch die Kettenregel multiplicirt, den kleinstmöglichsten Bruch zum Produkte. Am meisten zeigt sich der Vortheil der Multiplication durch die Kettenregel, wenn viele Brüche durch einander zu multipliciren sind. In diesem Falle giebt das gewöhnliche Verfahren, ein großes Produkt, welches in der Kettenregel oft in einer Ziffer erscheint.

§. 141.

Wenn man einer ganzen Zahl 1 zum Nenner giebt; wenn man die unreinen Brüche in unächte Brüche verwandelt; wenn man eine benamte Größe, die aus zwey Theilen beſtehet, erſt in einen unreinen, und denn in einen unächten Bruch darſtellet; ſo laſſen ſich hierdurch alle möglichen Fälle auf den einzigen Fall bringen, Bruch durch Bruch zu multipliciren.

§. 142.

Bruch durch Bruch durch die Kettenregel zu multipliciren.

Weil ein jeder Nenner ſeinen Zehler dividirt, (§. 100.) und die Theil-Columne der Kettenregel, ebenfalls die andere Columne dividirt; ſo ſchreibe man alle Nenner in die Theil- alle Zehler in die andere Columne, und verfahre wie man immer bey Bearbeitung der Kettenregel verfährt.

$\frac{3}{4}$ mal $\frac{2}{3}$

T 4 . . 3
3 . . 2 Prod. $\frac{1}{2}$,

$1\frac{3}{4}$ mal $\frac{4}{7}$

T 4 . . 7
5 . . 4 Prod. $1\frac{2}{7}$,

$\frac{4}{7}$ mal $\frac{3}{10}$.

T 1 . . 4
10 . . 3 Prod. $1\frac{1}{7}$,

$3\frac{1}{2}$ mal $\frac{11}{1}$

T 2 . . 7
1 . . 11 Prod. $\frac{77}{2}$,

$5\frac{7}{13}$ mal $10\frac{1}{3}$

T 13 . . 21
2 . . 72 Prod. $58\frac{2}{13}$,

$6\frac{1}{2}$ mal $\frac{3}{4}$

T 2 . . 13
4 . . 3 Pr. $4\frac{7}{8}$,

5 Thal.

5 Thal. 9 Gr. mal 2 Pf. 4 Loth	8 Gr. 6 Pf. mal $\frac{4}{7}$
T 4 . . 21	T 4 . . 35
8 . . 17	5 . . 4
Prod. $\frac{357}{32}$ oder 11 $\frac{5}{32}$ Thal.	Prod. 7 Gr.

Folgende Zahlen, reine und unreine Brüche, sollen durcheinander multiplicirt werden.

$$7,\ \tfrac{3}{4},\ 2\tfrac{1}{2},\ \tfrac{4}{7},\ 10,\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{13}{21},\ \tfrac{1}{5}$$

Man gebe den ganzen Zahlen 1 zum Nenner, die unreinen Brüche mache man rein, nun sind lauter reine Brüche da. Man setze daher alle Nenner in die Theil-Columne, alle Zehler in die andere, verkleinere die Zahlen verschiedner Columnen wie gewöhnlich gegen einander, und verfahre wie man immer verfährt. Das Produkt ist $8\frac{2}{5}$.

§. 143.

Bruch vom Bruche nehmen, ist: die gegebenen Brüche durch einander multipliciren, dis heißt, einen so großen Theil von dem einen Bruche nehmen, als der andere sagt: $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{4}$ ist $\frac{3}{16}$. Man wird dieses mit der Subtraction nicht verwechseln. $\frac{1}{2}$ von 4, oder die Hälfte von 4, ist 2. $\frac{1}{2}$ von 4 subtrahirt, ist Rest $3\frac{1}{2}$. Es ist aber gleichgültig ob man sagt $\frac{1}{4}$ von 1 Thaler, oder $\frac{1}{4}$ aus 1 Thaler, oder $\frac{1}{4}$ mal 1 Thaler. Der letzte Ausdruck sagt, man soll 1 Thaler $\frac{1}{4}$ mal nehmen. $\frac{3}{4}$ von der Hälfte eines halben Thalers ist $(\frac{36}{1} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{3}{4})$ $= 6\frac{3}{4}$ Groschen. Wir wollen die Rechnung, wenn Bruch von Bruch genommen werden soll, durch ein paar Exempel zeigen.

Ein Herr vermacht seinem Verwalter 1500 Thal. dem Kammerdiener $\frac{2}{3}$ von dem, was der Verwalter bekömmt, dem Koche $\frac{4}{7}$ von dem Theile des Kammerdiners,

ners, den vier Bedienten zusammen, zweymal so viel, als der Koch bekömmt. Wieviel erhalten die 4 Bedienten?

Man multiplicire alle Theile durcheinander, $\frac{1500}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{1}$. Das Produkt dieser Theile ist dasjenige, was die vier Bediente erhalten.

1	.	.	1500
1	.	.	2
3	.	.	4
5	.	.	2
1	.	.	Fac. 1600 Thal.

Um das Erbtheil der übrigen zu finden, und zugleich die Probe der Richtigkeit zu erhalten, bediene man sich der Kettenregel wie folgt.

1	.	.	1
2	.	.	1600 Fac. 800 Thal. Theil des Koches.
1	.	.	1
$\frac{4}{5}$	.	.	800 F. 1000 Th. Theil des Kammerdieners.
1	.	.	1
$\frac{2}{3}$	.	.	1000 Fac. 1500 Th. Theil des Verwalters.

Ein Alter hinterläßt 3000 Thaler und 10 Kinder, eins von diesen Kindern hat 6 Kinder, eins von diesen sechsen, hat 8 Kindern. Wieviel bekömmt ein jedes der letzten Kinder von obigen 3000 Thalern?

Eins von den 10 Kindern bekömmt $\frac{1}{10}$ von 3000, eins von den sechsen bekömmt $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{10}$, und ein Kind von den achten, erhält $\frac{1}{8}$ von $\frac{1}{6}$. Man multiplicire also, um das Erbtheil eines der letzten Kinder zu erhalten, durch einander $\frac{3000}{1} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}$.

T		
10	3000	
6	1	
8	1	
1	1	Fac. $6\frac{1}{4}$ Thal.

Multiplicirt man dieſe $6\frac{1}{4}$ Thaler durch 8, als die Anzahl der letzten Kinder; ſo erhält man in 50 Thaler das Erbtheil aller dieſer Kinder; dis Produkt weiter durch 6 multiplicirt, giebt 300; dieſes Produkt weiter durch 10 multiplicirt, giebt zum Beweiſe der Richtigkeit obige 3000 wieder.

Das gefundene Reſultat iſt immer der Theil, welchen der letzte Bruch bekömmt. Wenn man aber auch einen andern von den gegebenen Brüchen zum letzten macht, ſo bekömmt dieſer daſſelbe, was der vorige bekam. Z. E. Doris bekömmt $\frac{2}{4}$ von 8 Thalern, Thyrſis die Hälfte von dieſen Vierthel. Dieſer letzte Bruch iſt alſo 1 Thaler. Nun mag Thyrſis die Hälfte von 8, und Doris $\frac{1}{4}$ von dieſer Hälfte bekommen, ſo erhält die letzte ebenfalls 1 Thaler.

Achte Aufgabe.

Vom dividiren der Brüche.

§. 144.

Einen Bruch durch einen andern Bruch dividiren, iſt: in dem Quotienten eine Zahl finden, die anzeigt, wie oft ein kleinerer Bruch in einem größern ſteckt. Es iſt aber auch: finden, ein wie großer Theil von einem größern Bruche in dem kleinern ſteckt. Wird $\frac{1}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt; ſo ſagt der Quotient, daß die Hälfte von $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$ ſteckt; wird aber $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{4}$ dividirt; ſo muß der Quotient 2 ſeyn, weil $\frac{1}{4}$ zweymal in $\frac{1}{2}$ ſteckt.

Eben so ist es, wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt wird. Im ersten Falle, sagt der gefundene Quotient: ein wie großer Theil von der ganzen Zahl in dem Bruche enthalten ist. Im zweyten Falle sagt er: wie oft die ganze Zahl den Bruch in sich fasse. Z. E. $\frac{1}{2}$ durch 4 dividirt, giebt den Quotienten $\frac{1}{8}$, weil $\frac{1}{2}$ nur den achten Theil von vier, in sich fasset. Wird hingegen 4 durch $\frac{1}{2}$ dividirt; so ist der Quotient 8, denn $\frac{1}{2}$ steckt achtmal in 4.

Die gefundene Zahl, das ist der Quotient, steckt auch so oft im Dividendus, oder auch, ein so großer Theil des Quotienten steckt im Dividendus, als der Divisor sagt. Im obigen Falle steckt die Hälfte von 8 in 4. Die Zahl 6 durch $\frac{2}{3}$ dividirt, heißt: eine Zahl finden, die $\frac{2}{3}$ mal in 6 enthalten ist, das ist, davon der dritte Theil zweymal genommen 6 macht. Diese Zahl, oder der Quotient ist 9.

§. 145.

Wenn eine Zahl durch einen Bruch dividirt wird, so ist der Quotient größer, als die Zahl, welche dividirt worden.

Beweis.

Die Zahl 1 steckt so oft im Dividendus, als der Dividendus Einheiten hat. Eine Größe, die kleiner als 1 ist, das ist ein Bruch, muß daher öfterer im Dividendus enthalten seyn.

§. 146.

Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden soll, so darf man nur dasjenige im Bruche dividiren, was man hat, nämlich den Zehler von $\frac{4}{7}$ dividirt durch 2 ist $\frac{2}{7}$. Dis wäre freylich das natürlichste Verfahren,

fahren, allein in dem Falle, wenn sich der Zehler durch den Divisor ohne Rest nicht dividiren läßt, erhielte man zum Zehler einen unreinen Bruch, den man gerne vermeidet.

§. 147.

Weil aber eine Multiplication am Nenner, eine Division am Zehler ist; so kann man nur in diesem Falle, um die Division am Zehler, folglich am Bruche zu verrichten, den Nenner multipliciren. $\frac{3}{4}$ dividirt durch 2 ist $\frac{3}{8}$.

Man siehet hieraus, daß die Division auf verschiedene Art verrichtet werden könne, und man wird leicht einsehen, daß es mit der Multiplication eine gleiche Bewandniß habe. Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren, darf man nur den Zehler multipliciren, und den Nenner unverändert lassen, oder man darf nur den Nenner dividiren, und den Zehler unverändert lassen. (§. 104. 105.)

§. 148.

Bruch durch Bruch zu dividiren.

Um Bruch durch Bruch zu dividiren, kehre man den Divisor um, so, daß, was zuvor der Zehler war, jetzt der Nenner, und was der Nenner war, jetzt der Zehler werde. Nun multiplicire man Zehler durch Zehler, und Nenner durch Nenner. Das erste Produkt giebt im Quotienten den Zehler, das letzte den Nenner. Z. E.

$\frac{2}{3}$ dividirt durch $\frac{3}{4}$, ist $\frac{2}{3}$ mult. $\frac{4}{3}$ Quot. $\frac{8}{9}$
$\frac{4}{5}$ div. $\frac{7}{8}$ ist $\frac{4}{5}$ mult. $\frac{8}{7}$ Quot. $\frac{32}{35}$

Durch einen Bruch dividiren, ist also durch den umgekehrten Divisor multipliciren.

Beweis.

Beweis.

Das letzte Exempel mag zum Beweise dienen, man soll in demselben $\frac{4}{7}$, durch den achten Theil von 7, oder durch $\frac{7}{8}$ dividiren. Dadurch, daß man den Nenner 5 durch 7 multiplicirt, dividirt man den Bruch durch 7, er soll aber nur durch den achten Theil von 7 dividirt werden, daher muß der Quotient $\frac{4}{35}$, wieder durch 8 multiplicirt werden. Dieses geschiehet durch die Multiplication des Zehlers.

§. 149.

Die Division der reinen und unreinen Brüche durch einander, und durch ganze Zahlen, zeigt oft besondere Fälle. Man pflegt auch acht Regeln zu geben, wie man bey einem jeden Falle verfahren müsse. Um diese Regeln bis auf die einzige, wie man Bruch durch Bruch dividiren müsse, abzuschaffen, verwandle man, wie auch bey der Multiplication geschiehet, die ganzen Zahlen dadurch in Brüche, daß man ihnen eine 1 zum Nenner giebt; die unreinen Brüche verwandle man in unächte Brüche (§. 109.); und diejenigen Größen, welche aus zwey Theilen bestehen, aus Thalern und Groschen, aus Pfunden und Lothen, verwandle man erst in unreine, und weiter in unächte Brüche (§. 111.). Nun kann man in allen Fällen Bruch durch Bruch dividiren.

4 div. $\frac{2}{3}$, ist $\frac{4}{1}$ mult. $\frac{3}{2}$, ist Quotient $\frac{12}{2}$ ist 6

$3\frac{1}{2}$ div. 6, ist $\frac{7}{2}$ mult. $\frac{1}{6}$, ist Quot. $\frac{7}{12}$

$\frac{2}{3}$ div. 4, ist $\frac{2}{3}$ mult. $\frac{1}{4}$, ist Quot. $\frac{2}{12}$ oder $\frac{1}{6}$

$3\frac{2}{3}$ div. $5\frac{3}{4}$, ist $\frac{11}{3}$ mult. $\frac{4}{23}$, ist Quot. $\frac{44}{69}$

5 Thal. 6 Gr. div. 2 Pfund 8 Loth, ist $5\frac{1}{6}$ Thal. div. $2\frac{1}{4}$, ist $\frac{31}{6}$ mult. $\frac{4}{9}$ Quot. $\frac{124}{54}$

Daß ein benamter Divisor nichts anders sey, als eine namlose Zahl, die nur durch eine benamte Größe ausgedrückt ist, zeigt (§. 34.).

§. 150.

§. 150.

Bey der Multiplication bediente man sich mit Vortheil der Kettenregel, man kann dieses auch bey der Division aus demselben Grunde thun, denn der Quotient ist die vierte gefundene geometrische Proportionalzahl, zu drey gegebenen. (§. 53.) Wie sich der Divisor zum Dividendus verhält, so verhält sich 1 zum Quotienten.

Die Kettenregel liefert in dem Facitte die vierte Proportionalzahl.

§. 151.

Bruch durch Bruch durch die Kettenregel zu dividiren.

Weil in der Division der ganze Divisor, mit Nenner und Zehler, den Dividendus theilen soll; so setze man den Divisor mit Nenner und Zehler in die Theil-Columne und den ganzen Dividendus in die andere Columne. Versetze, wie gewöhnlich die Nenner, und verfahre auch im übrigen weiter, wie man immer verfährt. Die ganzen Zahlen, und die unreinen Brüche, werden auch hier in reine Brüche verwandelt. Wodurch auch die Verfahren allgemein wird.

$\frac{3}{4}$ div. $\frac{6}{7}$	
T $\frac{6}{7}$	$\frac{3}{4}$
Quot.	$\frac{7}{8}$

$6\frac{1}{2}$ div. 8	
T $\frac{8}{1}$	$\frac{13}{2}$
Quot.	$\frac{13}{16}$

$\frac{6}{7}$ div. $\frac{3}{4}$	
T $\frac{8}{4}$	$\frac{6}{7}$
Quot.	$1\frac{1}{7}$

$3\frac{3}{7}$ div. $\frac{9}{10}$	
T $\frac{9}{10}$	$\frac{18}{7}$
Quot.	4

$10\frac{1}{2}$ div. $3\frac{3}{4}$	2 Thal. 9 Gr. div. $3\frac{3}{4}$
T $\frac{15}{4}$ $\frac{21}{2}$	T $\frac{15}{4}$ $\frac{9}{4}$ Thal.
Quot. $2\frac{4}{7}$	Quot. $\frac{3}{7}$ Thal.

Wenn man ein Divisions-Exempel in Brüchen, wie einen gebrochenen Bruch schreibt. Das ist: wenn man den Divisor dem Dividendus zum Nenner giebt; so bedarf die Division der Brüche durch die Kettenregel, keiner besondern Regel. Weil ein jeder Nenner seinen Zehler dividirt, so setze man sowol in der Multiplication, als auch in der Division, die Nenner in die Theil- die Zehler in die zwote Columne. Z. E. $6\frac{3}{4}$ dividirt durch $\frac{1}{2}$ ist $6\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$. Der Zehler dieses gebrochenen Bruchs ist $6\frac{3}{4}$, der Nenner $\frac{1}{2}$. Es erhält daher $\frac{1}{2}$ seinen Platz in der Theil-Columne, $6\frac{3}{4}$ in der zwoten. Der Quotient ist $13\frac{1}{2}$.

$\frac{4}{7}$ soll durch 6 dividirt werden $\frac{\frac{4}{7}}{6}$ T 6 . . $\frac{4}{7}$ Quot. $\frac{4}{42}$.

6 soll durch $\frac{4}{7}$ dividirt werden $\frac{6}{\frac{4}{7}}$ T $\frac{4}{7}$ . . 6 Qu. $\frac{42}{4}$ ist $7\frac{1}{2}$

Neunte Aufgabe.

Von solchen Brüchen, die als ganze Zahlen erscheinen.

§. 152.

Dieses Kapittel handelt von der Bearbeitung solcher Größen, die aus Theilen von verschiedenen Namen bestehen, welche durch die Addition mit einander verbunden sind. Z. E. Thaler, Groschen und Pfennige, Centner, Pfunde, Lothe und Quentgen, Ruthen, Fuß und Zoll. Es ist aber diese ungleichnamige Größe nur alsdenn ein Gegenstand dieses Kapitels, wenn die ungleichnamigen Theile derselben addirt, eine Grö-

ße

ße ausmachen; nicht aber, wenn die Multiplication der Theile, die ganze Größe darstellet. Z. E. wenn die Länge eines Kastens 2 Ruthen, 5 Fuß, 3 Zoll ist, so macht die Summe der Theile die Länge aus. Es sind die kleinern Theile Brüche von den größern Theilen. Daher kann man die Länge auch so ausdrücken. $2\frac{5}{12}$ Ruthen, und $\frac{1}{4}$ Fuß; von solchen wird hier geredet. Wenn hingegen die Länge des Kastens 2 Ruthen, die Breite 5 Fuß, die Tiefe 3 Zoll wäre; so würde Länge, Breite und Tiefe durcheinander multiplicirt, die Größe des Kastens geben. Wenn solche Größen, wovon wir reden, addirt oder subtrahirt werden sollen, so verursachen sie wenig Mühe. (§. 60.) Wenn sie hingegen Glieder der Kettenregel ausmachen, das ist, wenn sie multiplicirt oder dividirt werden sollen, so machen sie oft, man wähle welche Rechnungsart man wolle, eine Rechnung weitläuftig. Es kömmt nur darauf an, den nächsten Weg zum Ziele zu finden.

§. 153.

Das allgemeine Mittel diese Größen zu multipliciren oder zu dividiren, ist, daß man ihre Theile zusammen wirft, oder wie man gewöhnlich spricht, daß man die Theile auf einen Namen bringt, und alsdenn die Summe der Theile multiplicirt oder dividirt. Z. E. sollen 2 Thal. 3 Gr. 2 Pf. zu Pfennigen gemacht werden; so mache man die 2 Thaler erst zu Groschen, das ist, man multiplicire die Thaler durch die Groschen eines Thalers durch 36, zum Produkte 72 addire man die 3 Groschen, giebt 75 Gr. Diese Groschen multiplicire man durch 8, weil 1 Gr. 8 Pfennige hat. Zum Produkte 600 addire man die 2 Pfennige. Die ganze Größe 2 Thal. 3 Gr. 2 Pfennige ist also 602 Pf. gleich.

Soll die ganze Größe zu Groschen gemacht werden, so mache man wie gesagt die Thaler zu Groschen, addire die Gr. dazu, und hänge die Pfennige als einen Bruch der Groschen der Summe an $75\frac{1}{4}$ Gr.

Soll sie zu Thalern gemacht werden, so drücke man jede Sorte außer die größeste, durch einen Bruch der nächst höhern Ordnung aus, und addire diese Brüche, die Summe hänge man der größesten Sorte als einen Bruch an. 2 Thal. 3 Gr. 2 Pf. ist $2\frac{3}{36}$ Thaler und $\frac{1}{4}$ Gr. ist $2\frac{13}{144}$ Thaler. Hierbey ist zu merken, daß man diejenigen Brüche, welche noch einen Bruch hinter sich haben, nicht verkleinert ausdrücken dürfe; obige $\frac{3}{36}$ Thaler dürfen nicht als $\frac{1}{12}$ ausgedrücke werden. 3 Centn. 7 Pfund 19 Loth 3 Quentgen zu Quentgen gemacht, geben 39375 Quentgen.

Es können zwar die Glieder einer solchen Größe immer auf einen Namen gebracht werden, und alsdenn sind sie als einfache Größen zu berechnen, aber hierdurch erwachsen große Zahlen, deren Bearbeitung beschwerlich wird, und dennoch ist es oft vortheilhaft; und wenn eine andere Größe durch eine solche ungleichnamige Größe dividirt werden soll, so ist es ganz nothwendig, daß sie zu einer Benennung gebracht werde. Auch dieses kann auf verschiedene Art geschehen, und es ist nicht gleichgültig, welchen Weg man wählet. Die Fälle, in welchen Größen durch verschiedene Namen ausgedrückt sind, fallen im gemeinen Leben zu häufig vor, als daß sie nicht eine genaue Untersuchung fordern sollten.

§. 154.

Groschen und Pfennige, Lothe und Quentgen, Wochen, Tage, und Stunden sind Theile vom Thaler, vom Pfunde, vom Jahre, man drückt daher oft alle Sorten einer Größe durch einen Bruch der größesten Sorte aus.

aus. Z. E. 9 Thal. 18 Gr. 7 Pf. sind $\frac{2743}{288}$ Thaler. Hier erfolgt schon bey dieser kleinen Größe ein unangenehmer Bruch, der nicht ohne Mühe zu der Größe erwächst, zu welcher er erwachsen muß, und der bey der weitern Bearbeitung, noch mehr Arbeit fordert. Weil dieser Ausdruck viel unangenehmes hat, so ist er am wenigsten zu wählen, und ich will weiter nichts davon sagen.

§. 155.

Der gewöhnlichste Ausdruck ist, daß man die ganze Größe zur kleinsten Sorte macht; aber hiedurch erwachsen große Zahlen. In sehr vielen Fällen findet man mit weniger Arbeit eine Zahl, welche alle Theile der gegebenen Größe in sich fasset, und minder groß ist. Man bringe die Sorten einer Größe nicht auf den kleinsten Namen, sondern auf denjenigen Namen, der unmittelbar vor der kleinsten Sorte stehet, und hänge die kleinste Sorte, im kleinsten Ausdrucke, als einen Bruch an.

Um zu zeigen, daß man durch diesen vorgeschlagenen Weg in sehr vielen Fällen gewinnet, mag folgende Aufgabe dienen.

Wieviel Thaler kostet 1 Anker Wein, wenn 2 Oxhoft 3 Anker 20 Quart, 110 Thal. 7 Gr. 4 Pfen. kosten?

Der Satz nach der vorgeschlagenen Methode ist.

1 Thal.	. .	1 Ank.
$15\frac{1}{2}$ Ank.	. .	$3967\frac{1}{2}$ Gr.
36 Gr.	. .	1 Thal.

Auf den kleinsten Namen gebracht, ist der Satz:

1 Thal.	. .	1 Ank.
620 Quart.	. .	31740 Pf.
1 Ank.	. .	40 Quart
36 Gr.	. .	1 Thal.
8 Pf.	. .	1 Gr.

Es ist wahr, man hat bey der vorgeschlagenen Methode nur alsdenn Vortheil, wenn die letzte Sorte sich durch einen verkleinerten Bruch ausdrücken läßt, widrigen Falles nicht. Z. E. wenn am Ende 3, 7, 5 Pf. sind, so gewinnt man deswegen nichts, weil sich $\frac{3}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{5}{8}$ nicht verkleinert ausdrücken lassen; da man aber immer gewinnt, wenn am Ende 2, 4 oder 6 Pf. stehen, indem sich diese Pfennige durch $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ ausdrücken lassen, nie aber verliert: so hat man Ursache genug die vorgeschlagene Methode bey der Kettenregel immer zu gebrauchen.

Fasset die Theil-Columne der Kettenregel eine ungleichnamige Größe in sich, so ist es deswegen nothwendig, daß sie zu einer Benennung gebracht werde, weil man durch solche Größe, ohne sie in eins zu versammlen, so wenig dividiren kann, als es möglich ist, eine Division mit den einzelnen Ziffern einer Zahl, z. E. erstlich mit den Hunderten, dann mit den Zehnern, zuletzt mit den Einern zu verrichten.

Enthält die zwote Columne der Kettenregel solche zusammen gesetzte Größen, so ist es nicht nothwendig, daß sie auf einen Namen gebracht werden. Verschiedene Mittel sind da sie zu bearbeiten.

§. 156.

Befindet sich nur eine zusammengesetzte Größe in der zwoten Columne, so kann man alle Glieder derselben oft viel vortheilhafter multipliciren oder dividiren,

als

als wenn die Glieder derselben auf einen Namen gebracht werden. Z. E. wenn 9 Thal. 6 Gr. 2 Pfen. durch 3 multiplicirt oder dividirt werden soll, so ist das Produkt 27 Thal. 18 Gr. 6 Pf. Der Quotient 3 Thal. 2 Gr. $\frac{2}{3}$ Pf. Sind aber die Zahlen groß, so wird die Arbeit wegen der Brüche, die entstehen, weitläuftig. Z. E. wenn 9 Thal. 6 Gr. 2 Pf. durch 165 multiplicirt oder dividirt werden sollte.

§. 157.

Wenn man nicht alle Glieder zur kleinsten Sorte macht, so bedient man sich gewöhnlich der Zerstreuung der Zahlen, das ist, man zerlegt die Zahl in solche Theile, deren Summe der Zahl gleich ist. Die Aufgabe, welche durch die Zerstreuung aufgelößt werden soll, mag diese seyn.

Wieviel kosten 704 Centner; wenn 1 Centn. 293 Thal. 28 Gr. 6 Pf. kosten?

1 Thal. . . 704 Centn.
1 Centn. . . 293 Thal. 28 Gr. 6 Pf.

2112		18	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{2}$
6336		9	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
1408		1	$\frac{1}{6}$		
206272	Thal.				
352	"				
176	"				
19	"	20	Gr.		
9	"	28	"		
4	"	32	"		
Facit 206834	Thal.	8	Gr.		

Es sollen sowol die Thaler als auch die Groschen und Pfennige durch 704 multiplicirt werden, man multiplicirt daher die Thaler 293 durch 704. Das Pro-

dukt ist 206272. Nun zerstreue man die 28 Gr. in 18, 9, 1 würden diese zerstreuten Groschen durch 704 multiplicirt, so würde die Summe der Produkte die richtige Anzahl Gr. seyn. Um aber die Produkte sogleich in Thalern zu erhalten, drücke man die 18 Gr. durch einen Bruch eines Thalers durch $\frac{1}{2}$ Thal. aus, 9 Gr. ist $\frac{1}{2}$ von 18, und 1 ist $\frac{1}{9}$ von 9. Nun multiplicire man 704 durch $\frac{1}{2}$, das Produkt 352 sind Thaler, man setze es also unter das Produkt der Thaler, weil 9 die Hälfte aus 18 ist, so multiplicire man auch das Produkt 352 durch $\frac{1}{2}$, das Produkt 176 multiplicire man durch $\frac{1}{9}$, giebt 19 Thal. 20 Gr. Nun zerstreue man auch die 6 Pf. in 4 und 2 Pf. die 4 Pf. sind $\frac{1}{2}$ Gr. nämlich aus den letzten zerstreuten Groschen, 1 Pf. ist $\frac{1}{4}$ aus 4. Weil nun $\frac{1}{2}$ Gr. aus 1 genommen ist, so multiplicire man auch das Produkt des einen Groschens, nämlich 19 Thal. 20 Gr. durch $\frac{1}{2}$ ist 9 Thal 28 Gr. hievon $\frac{1}{2}$ ist 4 Thal. 32 Gr. Die Summe aller Produkte ist das Produkt der ganzen Größe, und das Facit des Exempels.

Man pflegt diese Rechnungsart die kurze Rechnungsart zu nennen. Ich würde mehr von ihr sagen, wenn sie mir vorzüglich gefiele; und würde ihrer gar nicht erwehnt haben, wenn sie nicht so allgemein wäre. Sehr oft sind die kleinern Theile einer ungleichnamigen Größe von der Art, daß sie sich nicht durch wenige Glieder also zerstreuen lassen, daß die Zehler der hieraus entstehenden Brüche Einer sind. Gehen außer dem die Nenner in den Divisionen nicht auf, so wird die Arbeit weitläuftig; hierzu kömmt, daß dieser Art die Simplicität fehlet, welche nöthig ist, wenn ein Ungeübter das ganze Verfahren leicht soll übersehen können.

Der Vorzug des Zerstreuens von der Verwandelung der Glieder zu einer Art, besteht darinnen: 1) daß man das Produkt der kleinern Sorten, gleich in grös-

sern

sern Sorten erhält; 2) daß man mit minder großen Zahlen, aber desto öfterer arbeitet. Diese Vorzüge habe ich ohne den Umweg des Zerstreuens durch einen geradern und ebenern Weg gefunden.

§. 158.

Ehe ich die Verfahren zeige, muß ich ein paar Vortheile erwehnen, welche überhaupt bey zusammengesetzten Größen anzuwenden sind.

Wenn sich alle Theile einer solchen Größe, durch eine Zahl ohne Rest dividiren lassen, durch welche auch eine Zahl der gegenseitigen Columne theilbar ist, so kann man die Verkleinerung an allen Theilen verrichten. Gehen aber nicht alle Theile der Größe auf, so darf die Verkleinerung nicht unternommen werden. Z. E. wieviel Thaler Capital muß man zu 6 Procent verleihen, wenn in einem Jahre 18 Thal. 24 Gr. 6 Pfen. Zinse gehoben werden soll.

1 Thal. Cap. . . 18 Thal. 24 Gr. 6 Pf. Zinse
6 Zinse . . 100 Cap.

Weil alle drey Theile der verlangten Zinse, als auch die 6 der ersten Columne durch 3 theilbar sind, so kömmt statt 6, 3, und statt 18 Thal. 24 Gr. 6 Pfen. kömmt 6 Thal. 8 Gr. 2 Pf.

Wenn in einem unreinen Bruche, beydes, sowol die ganze Zahl, als auch der Zehler des Bruchs, durch eine Zahl theilbar ist, so kann die Verkleinerung geschehen. Ist nur eins von beyden theilbar, so darf sie nicht geschehen.

1 . .	$15\frac{10}{11}$	ist	1 . .	$3\frac{2}{11}$
25 . .	7		5 . .	7

In diesem Exempel läßt sich sowol 15, als auch 10, und in der ersten Columne 25, durch 5 dividiren.

§. 159.

Nun wollen wir diejenige Aufgabe, welche §. (157.) durch zerstreuen aufgelöset ist, noch einmal vor uns nehmen. Wollte man die Glieder der zusammengesetzten Größe auf einen Namen bringen; so würde ein grosses Produkt erfolgen; die Verwandlung der gefundenen Groschen würde beschwerlich, und die Arbeit überhaupt weitläuftig seyn.

Wollte man jedes Glied besonders durch 704 multipliciren, so würden zu große Zahlen und eine beschwerliche Verwandelung der Groschen zu Thalern, und der Pfennige zu Groschen, ebenfalls unvermeidlich seyn.

Die leichtere Methode, welche ich in den meisten Fällen vorschlage, ist diese: **Man zerschneide die zusammengesetzte Größe in zwey bequeme Theile, rechne jeden Abschnitt durch die Kettenregel besonders aus, und addire die Facitte.**

1 Thal. . .	704 Centn.	F.	206272 Thal.
1 Centn. .	293 Th. u. $28\frac{3}{4}$ Gr.	F.	562 Th. 8 Gr.
1 Thal. . .	704 Centn.	Summe	206834 Th. 8 Gr.
1 Centn. .	$28\frac{3}{4}$ Gr.		
36 Gr. . .	1 Thal.		

Die Vorzüge dieser Rechnungsart sind folgende.

1) Die Simplicität fällt einem jeden von selbst in die Augen.

2) Man ist der Arbeit überhoben, die zusammen gesetzte Größe auf einen Namen zu bringen.

3) Man arbeitet mit kleinern Zahlen.

4) Man erhält die Produkte sogleich in den verlangten Sorten, ohne sie besonders verwandeln zu dürfen.

5) Man darf auch die mittlern Sorten einer zusammengesetzten Größe, durch einen verkleinerten Bruch ausdrücken, welches, wenn sie auf einen Namen gebracht

bracht wird, nicht geschehen darf. Man hätte in der Auflösung die Thaler und Groschen zusammen nehmen, und solche durch $293\frac{7}{9}$ Thaler ausdrücken, und alsdenn die $\frac{3}{4}$ Gr. besonders berechnen können.

6) Sehr oft kann man auch den Multiplicator gegen die Glieder der Theil-Columne verkleinern. In dem gegebenen Exempel kann 704 bis auf 44 verkleinert werden, welches nicht geschehen kann, wenn alle Glieder der zusammengesetzten Größe auf einen Namen gebracht, oder wenn alle Glieder derselben multiplicirt werden.

Drey Fälle können hier vorfallen, 1) entweder die 2te Columne der Kettenregel enthält nur eine zusammengesetzte Größe, oder 2) sie enthält zwo derselben; 3) oder in der Theil-Columne ist eine zusammengesetzte Größe befindlich. Von allen diesen Fällen müssen Exempel gegeben werden.

Wieviel Thaler kosten 860 Pfund 20 Loth 3 Qu. 2 Dertg. wenn 1 Pfund 27 Gr. kostet?

Die Auflösung fordert folgende zwey Exempel.

1 Thal. . .	$860\frac{5}{8}$ Pfund	1 Pf. . .	$3\frac{1}{2}$ Quentg.
1 Pf. . .	27 Gr.	1 Pf. . .	27 Gr.
36 Gr. . .	1 Thal.	1 Gr. . .	8 Pf.
		32 Loth .	1 Pfund
645 Thal.	16 Gr. 7 Pf.	4 Qu. .	1 Loth
	$5\frac{29}{32}$		
F. 645 Th.	17 Gr. $4\frac{29}{32}$ Pf.		

Man siehet leicht, daß $3\frac{1}{2}$ Quentg. keine Groschen, vielweniger Thaler betragen können. Daher frägt man im 2ten Exempel, wieviel Pfennige kosten $3\frac{1}{2}$ Qu.

Wieviel Pfund erhält man für 288 Thal. 7 Gr. 2 Pf. wenn 3 Loth 4 Gr. kosten?

Im ersten Exempel rechne man aus wieviel Pfund man für 288 Thaler, im andern wieviel Loth man für $7\frac{1}{4}$ Gr. empfängt.

1 Pfund . .	288 Thal.	1 Loth . .	$7\frac{1}{4}$ Gr.
4 Gr. . .	3 Loth	4 Gr. . .	3 Loth
1 Thal. . .	36 Gr.		
32 Loth . .	1 Pfund		

243 Pf. — Loth — Qu.
5 = $1\frac{3}{4}$ =

Facit 243 Pf. 5 Loth $1\frac{3}{4}$ Qu.

Befinden sich in der zweyten Columne zwey zusammengesetzte Größen, so bringe man die kleinste dieser Größen auf den Namen der unmittelbar vor der kleinsten Sorte steht. Die größeste zusammengesetzte Größe zerschneide man in zwey Theile, und verfahre wie zuvor.

Wieviel Thaler kosten 800 Pfund 16 Loth 3 Qu. wenn 10 Loth 2 Quentg. kosten 3 Thal. 18 Gr. 6 Pf.?

1 Thal. . .	$800\frac{1}{2}$ Pfund	1 Gr. . .	3 Quentg.
$10\frac{1}{2}$ Loth . .	$126\frac{3}{4}$ Gr.	$10\frac{1}{2}$ Loth . .	$126\frac{3}{4}$ Gr.
36 Gr. . .	1 Thal.	4 Qu. .	1 Loth
1 Pf. . .	32 Loth		

8589 Thal. 17 Gr. $5\frac{1}{7}$ Pf.
9 Gr. $\frac{3}{7}$ Pf.

Facit 8589 Thal. 26 Gr. $6\frac{1}{7}$ Pf.

Wieviel Pfund erhält man für 200 Thal. 6 Gr. 2 Pf. wenn man für 1 Thal. 1 Pfund 2 Loth 3 Qu. erhält?

1 Pfund

1 Pfund . .	200 Thal.	1 Loth . .	$6\frac{1}{4}$ Gr.
1 Thal. . .	$34\frac{3}{4}$ Loth	1 Th. . .	$34\frac{3}{4}$ Loth
32 Loth . .	1 Pfund	36 Gr. . .	1 Thal.

217 Pfund 6 Loth
6 Loth $\frac{19}{144}$ Qu.

Facit 217 Pfund 12 Loth $\frac{19}{144}$ Qu.

Es ist zwar nicht nothwendig, daß in den gegebenen Fällen eine der zusammengesetzten Größen, auf einen Namen gebracht werde, man kann beyde Größen zerschneiden, und durch 4 Exempel die Aufgabe auflösen, allein die Auflösung wird weitläuftiger, und es entstehet leicht eine Verwirrung.

Wenn sich auch in der Theil-Columne eine zusammengesetzte Größe befindet, die aus mehr als 2 Gliedern besteht, so muß diese nothwendig auf einen Namen gebracht werden. Im übrigen verfährt man wie gezeigt ist.

Wieviel Centner erhält man für 422 Thal. 12 Gr. 5 Pf. wenn 2 Pfund 0 Loth 2 Quentg. 1 Thal. 1 Gr. 4 Pf. kosten?

1 Centn. . .	$422\frac{1}{3}$ Thal.	1 Loth . .	5 Pf.
$37\frac{1}{2}$ Gr. . .	$64\frac{1}{2}$ Loth	$37\frac{1}{2}$ Gr. . .	$64\frac{1}{2}$ Loth
100 Pfund . .	1 Centn.	8 Pf. . .	1 Gr.
32 Loth . .	1 Pfund		
1 Thal. . .	36 Gr.		

8 Centn. 17 Pfund 6 Loth $3\frac{13}{21}$ Quentg.
1 Loth $\frac{3}{10}$ Qu.

Fac. 8 Centn. 17 Pfund 7 Loth $3\frac{41}{70}$ Qu.

§. 160.

Weil im gemeinen Leben die äußerste Schärfe nur selten gefordert wird; so kann man sich Freyheiten er-

lauben, welche die Arbeit, ohne beträchtliche Fehler zu verursachen, merklich vermindern.

1) Wenn an der kleinsten Sorte einer zusammengesetzten Größe ein großer Bruch hängt, so entstehet ein geringer Fehler, wenn man vom Nenner und Zehler, eine gleiche Anzahl der letzten Ziffern wegwirft, und nur die ersten Ziffern behält. Z. E. setzt man statt $1\frac{37929}{281744}$ Pfennig $1\frac{4}{12}$ oder $\frac{1}{4}$ Pfennig, so verursacht diese Veränderung einen Fehler der nur den 21ten Theil eines Pfennigs beträgt. Je weniger Ziffern vom Zehler und Nenner weggeworfen werden, um desto näher bleibt man der völligen Richtigkeit.

2) Noch viel unbeträchtlicher wird der Fehler, wenn man die letzte Ziffer eines Bruchs der kleinsten Sorte, welcher sich nicht verkleinern lassen will, also ändert, daß er sich dadurch verkleinern läßt. Z. E. $\frac{864}{8417}$ Quent. in diesem Bruche kann man die letzten Ziffern 4 und 7 in 5 verwandeln, damit sich der Bruch durch 5 verkleinern lasse. Macht man aus der 7 eine 6, so läßt sich der Bruch bis auf $\frac{54}{401}$ verkleinern. Wirft man die beyden letzten Ziffern aus dem Nenner und Zehler weg, und behält $\frac{8}{74}$ oder $\frac{1}{8}$, so entstehet hierdurch ein Fehler, der nur den 114ten Theil eines Quentgens beträgt.

3) Wenn man aus dem Großen ins Kleine arbeitet, so kann man, wenn die äußerste Schärfe nicht gesucht wird, die kleinsten Sorten einer zusammengesetzten Größe wegwerfen. Arbeitet man aber aus dem Kleinen ins Große, so würde die erwähnte Veränderung der Größen einen beträchtlichen Fehler verursachen. Z. E. wieviel Groschen kostet 1 Pfund, wenn 800 Pfund 8 Loth 3 Qu. 100 Thal. 12 Gr. 4 Pf. kosten? Wirft man sowol die Lothe und Quentgen, als auch die Groschen und Pfennige weg, so beträgt der Fehler, welcher hieraus entstehet, den neunten Theil eines Pfennigs. Denn werden alle Theile des Exempels berechnet,

net, so ist das Facit 4 Gr. $4\frac{2308}{20487}$ Pf. Werden blos die Thaler und Pfunde berechnet, so ist das Facit 4 Gr. 4 Pf. Läßt man nun die Pfennige und Quentgen aus der Acht, so ist die Unrichtigkeit, welche hieraus entstehet, als nichts zu achten.

Soll hingegen aus dem gegebenen Preise eines Pfundes welcher 1 Thal. 2 Gr. 1 Pf. seyn mag, der Preiß von 100 Pfund 8 Loth 3 Quentg. gefunden werden, so darf man deswegen die kleinsten Sorten nicht wegwerfen, weil diese kleinen Sorten durch die Auflösung multiplicirt werden sollen, folglich um desto beträchtlicher werden, je größer die Anzahl Pfunde ist, deren Werth man finden will.

Eine kleine Aufmerksamkeit wird einem jeden sagen, in welchem Falle er sich eine Verkürzung der Arbait erlauben, oder nicht erlauben dürfe.

Siebentes Kapitel.

Von den Decimal-Brüchen.

I. Abschnitt.

Von den Decimal-Brüchen überhaupt.

§. 161.

Wenn man den Werth der Ziffern einer Zahl nach der Decimal-Ordnung bestimmt, so gilt in der Zahl 1 1 1 die erste Ziffer linker Hand 1 Hunderter, die 2te 1 Zehner, und die 3te 1 Einer. Die zwote Stelle giebt also ihren Ziffern einen zehnmal geringern Werth, als die erste linker Hand, die dritte, einen zehnmal geringern Werth als die zwote. Macht man nun hinter den Einern ein Comma, und schreibt eine Zahl hinter dis Comma, deren Ziffern in ihrem Werthe, eben so, wie vor dem

Comma,

Comma, weiter abnehmen; was wird der Werth dieser Ziffern seyn? Es müssen Brüche seyn. Die erste Ziffer hinter dem Comma, muß zehnmal weniger gelten, als wenn sie in der Stelle der Einer stünde. 111,111 in diesem Falle ist sie $\frac{1}{10}$, die zwote $\frac{1}{100}$, die dritte $\frac{1}{1000}$.

Nun wollen wir statt der Einen, mehr geltende Ziffern nehmen. 375, 246 und den Werth einer jeden Ziffer bestimmen. 300, und 70 und 5, und $\frac{2}{10}$ und $\frac{4}{100}$ und $\frac{6}{1000}$. Addirt man die Ganzen und die Brüche, so ist die Summe $375\frac{246}{1000}$. Eine jede Zahl aber, ist die Summe von dem Werthe ihrer Ziffern.

Einen solchen Bruch als der angehängte ist, nennet man einen **Decimal-Bruch**. Ein Decimal-Bruch ist also, ein jeder Bruch, dessen Nenner eine 1 ist, hinter welcher ein oder mehrere Nullen hängen. Z. E. $\frac{5}{10}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{3}{1000}$.

§. 162.

Wenn an einer Zahl ein Decimal-Bruch hänget; so läßt man den Nenner weg, um aber den Werth des Nenners zu bestimmen, giebt man dem Zehler so viele Decimalstellen als der Nenner Nullen hat. Sind vor dem Bruche Ganze, so sondert man solche durch ein Comma ab, sind keine Ganze da, so setzt man in die Stelle der Ganzen eine Nulle. Z. E. $\frac{7}{100}$ ist 0, 0 7. Die 0 vor dem Comma sagt: es sind keine Ganze da. Weil der Nenner 100 zwo Nullen hat, so mußte der Zehler auch zwo Decimalstellen erhalten 07. Hätte man die 0 hinter der 7 gesetzt, so wäre der Bruch $\frac{70}{100}$ geworden, da er nur $\frac{7}{100}$ seyn soll. $3\frac{16}{100}$ ist 3, 16. $\frac{5}{1000}$ ist 0, 005.

§. 163.

Ueberhaupt wenn den Decimal-Brüchen eine bestimmte Anzahl Nullen gegeben werden soll; so setze man

man sie immer vor denselben; darf man aber nach Belieben mehr oder weniger Nullen zum Decimalbruche schreiben, das ist, ist die Anzahl Nullen unbestimmt; so setze man sie immer hinter den Bruch. Durch diese Regel werden in der Folge viele Verwirrungen vermieden.

§. 164.

Die vornehmsten Vortheile, welche die Decimal-Brüche im Rechnen liefern, sind folgende:

1) Weil der Nenner eines Decimalbruchs nicht ausgedrückt wird, und die Ziffern des Zehlers, mit den Ziffern der ganzen Zahl, welche vor dem Decimalbruche stehen, als eine Zahl anzusehen ist; so berechnet man ächte, unächte, und unreine Brüche als ganze Zahlen.

2) Wenn man auch, nachdem es die Umstände erfordern, z. E. in der Kettenregel, die Nenner ausdrückt, so erfordert doch die Multiplication durch 10, 100, 1000, nicht mehr Arbeit, als daß man dem Multiplicandus so viel Nullen anhängt, als der Multiplicator Nullen hat. Z. E. 35 mal 100 ist 3500.

3) Die Division durch 10, 100, 1000, erfordert eben so wenig Arbeit, man darf nur in dem Dividendus so viele Ziffern rechter Hand abschneiden, als der Divisor Nullen hat. 73598 div. 1000 ist 73, 598.

4) Die Verwandelung unreiner Brüche in unächte Brüche, erfordert, wenn sie auf gewöhnliche Art verrichtet wird, und die ganze Zahl und die Nenner aus vielen Ziffern bestehen, eine weitläuftige Multiplication, da sie hingegen gar keine Arbeit kostet, wenn sie in Decimalbrüchen unternommen wird.

5) Wenn man mit Decimalbrüchen addirt oder subtrahirt, so gebraucht man die Nenner nicht gleich zu machen.

§. 165.

§. 165.

Solche Brüche die sich genau, und durch kleine Decimalbrüche ausdrücken lassen, bearbeitet man mit vielem Vortheile durch Decimalbrüche. Wäre diese Rechnungsart in allen Fällen vortheilhaft, so würde die Rechnung mit gewöhnlichen Brüchen, ganz zu entbehren seyn, das aber ist sie nicht.

Ehe gezeigt werden kann, wie ein gegebener Bruch in einen Decimalbruch verwandelt wird, und wie man mit solchen Brüchen rechnet, ist zuvor folgendes zu erinnern.

§. 166.

Hängt man hinter eine ganze Zahl, Nullen, so wird die Zahl durch jede angehängte Nulle, zehnmal größer; hängt man hinter einen Decimalbruch Nullen, so wird selbiger durch diese Nullen verändert. 0, 7 ist 0, 700.

Beweis.

Der Nenner des Decimalbruchs ist immer eine 1 mit so vielen Nullen, als der Zehler Decimalstellen hat. Durch die am Zehler angehängten Nullen bekömmt der Zehler, folglich auch der Nenner, so viel mehr Decimalstellen, als man Nullen anhänget. Dis Verfahren ist nichts anders, als eine gleiche Multiplication des Zehlers und Nenners. $\frac{3}{10}$ ist $\frac{30}{100}$ ist $\frac{300}{1000}$ oder $\frac{3000}{10000}$.

Man kann daher auch die Nullen, welche man hinter einem Decimalbruche findet, ohne Verletzung der Größe wegstreichen. Denn dis ist nichts anders, als den Bruch auf den kleinsten Ausdruck bringen, welchen er, als Decimalbruch betrachtet, haben kann.

§. 167.

§. 167.

Wenn man hinter einer ganzen Zahl ein Comma macht, alsdenn darf man, ohne Verletzung der Größe, hinter dem Comma Nullen hängen. 3247 ist 3247, 000.

Beweis.

Durch die hinter das Comma gesetzten Nullen, werden die Einer, Zehner, und Hunderter, nicht von ihrer Stelle, in höhere Ordnungen gerückt. Die Nullen hinter dem Comma sagen nur, daß sich in den besetzten Decimalstellen keine Ziffern befinden.

§. 168.

Setzt man vor einer ganzen Zahl, Nullen, so verändert sich dadurch die Zahl nicht, denn die Einer und die höhern Ordnungen, werden durch diese Nullen nicht aus ihren Stellen gerückt. Setzt man aber vor einem Decimalbruche Nullen; so wird der Bruch durch jede vorgesetzte Nulle zehnmal kleiner.

Beweis.

Die erste Stelle hinter dem Comma, ist die Stelle der Zehntheile. Ist diese Stelle mit einer Ziffer besetzt; so drückt diese Ziffer zehn Theile aus. Setzt man eine Nulle vor derselben; so wird dadurch diese Ziffer in die Stelle der hundert Theile gerückt, wo sie zehnmal weniger gilt als sie zuvor gegolten.

0, 9 ist $\frac{9}{10}$. 0, 09 ist $\frac{9}{100}$. 0, 009 ist $\frac{9}{1000}$.

§. 169.

Wenn Decimalbrüche zur Addition unter einander geschrieben werden; so muß die Reihe der zehn Theile in allen Posten besetzt seyn. Denn, wie man in ganzen

357, 5621 ganzen Zahlen, die Einer unter einander schreibt, so schreibt man auch in Decimalbrüchen, die Ziffern von gleicher Ordnung unter einander. Die Plätze, welche nicht durch Ziffern besetzt sind, werden, wie in ganzen Zahlen, mit Nullen besetzt.
3, 7
48, 002

II. Abschnitt.

Vom Rechnen mit Decimal-Brüchen.

§. 170.

Einen gegebenen Bruch durch einen Decimal-Bruch auszudrücken.

Man schreibe hinter den Zehler des gegebenen Bruchs eine beliebige Anzahl Nullen, und dividire den Zehler, sammt den angehängten Nullen durch den Nenner des gegebenen Bruchs. Der Quotient ist der gesuchte Decimalbruch, welcher dem gegebenen Bruche gleich ist.

$\frac{1}{2}$ 2 | 10 | 0, 5. $\frac{4}{5}$ 5 | 40 | 0, 8.

$\frac{3}{4}$ 4 | 300 | 0, 75 $\frac{7}{8}$ 8 | 7000 | 0, 875

Beweis.

Um diesen Beweis, welcher der ganzen Lehre von den Decimalbrüchen ein Licht giebt, desto leichtrr einzusehen, wird man sich aus dem (§. 106.) erinnern, daß der Werth eines Bruchs nicht verändert werde, wenn man sowol den Zehler als auch den Nenner mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt. Man wird sich aus (§. 94.) erinnern, daß der Nenner eines jeden Bruchs immer ein Ganzes sey. Wie ist nun $\frac{1}{2}$ zu 0, 5 verändert? Man durfte dem Zehler und dem Nenner

gleich

gleich viele Nullen anhängen, denn dis ist eine gleiche Multiplication $\frac{10}{20}$ um nun diesen, der Form nach, veränderten Bruch, ohne Veränderung seines Werths in einen Decimalbruch, das ist, in einen Bruch, dessen Nenner eine 1 mit Nullen ist, darzustellen, dividire man Nenner und Zehler durch den gegebenen Nenner 2, hierdurch erhält man den Bruch $\frac{5}{10}$ das ist 0, 5.

Um noch ein Exempel zu geben, soll $\frac{3}{4}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden. $\frac{3}{4}$ ist $\frac{300}{400}$ mit dem alten Nenner 4, sowol Zehler als Nenner dividirt, giebt den Bruch $\frac{75}{100}$ oder 0, 75. Es wäre aber eine vergebliche Arbeit, wenn man dem Nenner so viele Nullen als den Zehler anhängen wollte, genug, wenn der Nenner nur am Ende diese angehängte Nullen bekomt.

§. 171.

Weil aber der Nenner eines jeden Bruchs, immer alle Theile eines Ganzen ausdrückt, und der Nenner so viele nicht hingeschriebene Nullen bekömmt, als man dem Zehler anhängt; so werden dadurch, daß man dem Zehler Ein, Zwey, oder drey Nullen anhängt, die Theile eines Ganzen ebenfalls durch zehn, hundert oder Tausend multiplicirt; das ist, ein Ganzes wird in 10, 100, oder 1000 mal kleinere Theile getheilt, als es getheilt war.

$\frac{3}{4}$ Thaler heißt: 1 Thaler ist in 4 Theile getheilt, von welchen Theilen drey da sind. Durch zwo an Zehler angehängte Nullen, wird 1 Thaler in 400 Theile getheilt, von welchen 300 da sind, oder $\frac{300}{400}$. Beydes, sowol Nenner als Zehler, durch 4 dividirt, giebt $\frac{75}{100}$ oder 0, 75 Thal. ist $\frac{3}{4}$ Thal.

Man sieht also, daß die ganze Einheit, von welcher der gegebene Bruch ein Theil ist, nach verrichteter Verwandelung in einen Decimalbruch, durch eine-

am Zehler angehängte Nulle in 10, durch zwo Nullen in hundert, durch 3 in tausend Theile getheilt werde. Z. E. $\frac{138}{345}$ Pfund in einem Decimalbruche ausgedrückt, ist 0, 4. Vor der Verwandelung war 1 Pfund in 345 Theile getheilt, von welchen man 138 hatte. Weil man aber dem Zehler eine Null angehängt, so ist dadurch 1 Pfund nur in 10 Theile getheilt worden, von welchen Theilen man nunmehro 4 hat. Denn die 345 Theile, in welche ein Ganzes getheilt war, sind dadurch vernichtet, daß sowol der Zehler als auch der Nenner durch 345 dividirt ist.

§. 172.

Daß es solche Nenner geben müsse, die erst in verschiedene angehängte Nullen dividirt aufgehen; und auch solche, die nie aufgehen, wird man leicht einsehen. In dem letzten Falle setze man die Rechnung durch mehr angehängte Nullen so lange fort, als man den Quotienten, oder den Decimalbruch, mehr oder weniger genau verlanget. Geht die Division auf, so drückt der gefundene Decimalbruch, den gegebenen Bruch genau aus: bleibt aber ein Rest, so wird die Unrichtigkeit um desto geringer, durch je mehr Ziffern man den Decimalbruch ausdrückt. Durch eine jede mehr berechnete Decimalstelle wird der Nenner zehnmal größer, das ist, in zehnmal kleinere Theile getheilt, folglich der Fehler viel kleiner, als er zuvor war. Wie man die Größe der Unrichtigkeit in diesem Falle bestimmet, wird in der Folge gezeigt.

$\frac{2}{3}$ 3	2000 222	0, 666	$\frac{5}{6}$ 6	50000 2222	0, 8333

Diese Exempel zeigen, daß, wenn man eine auch noch so große Anzahl Nullen anhängen, und die Division in solche fortsetzen wollte, sie doch nie aufgehen würde

würde. Solche Brüche, die sich nicht völlig durch Decimalbrüche ausdrücken lassen, nennet man unendliche Brüche. Ob nun gleich ein unendlicher Bruch, nicht völlig mit dem gegebenen Bruche einerley ist, so kann man doch den Unterschied, wenn man die Rechnung durch mehr angehängte Nullen fortsetzt, so unbeträchtlich machen, daß er für nichts zu achten ist.

§. 173.

Hängt man dem Zehler nur eine Nulle an, so kann der Fehler nie den zehnten Theil einer Einheit; zwo Nullen nie den hundertsten Theil; drey Nullen nie den tausendsten Theil einer Einheit betragen. Ist der gegebene Bruch ein Theil vom Thaler, vom Jahre, vom Pfunde, so ist die Einheit 1 Thaler, 1 Jahr, 1 Pfund.

§. 174.

Um aber genau bestimmen zu können, wieviel die Unrichtigkeit eines unendlichen Bruchs eigentlich betrage, hänge man dem gefundenen Decimalbruche einen Bruch an, dessen Zehler der überbliebene Rest, und dessen Nenner der Divisor mit so vielen Nullen ist, als der gefundene Bruch Decimalstellen hat. Z. E.

$\frac{23}{64}$ 64 | 23000 | 0,359$\frac{24}{64000}$
192 | |
380 |
320 |
600
576
24

$\frac{5}{7}$ 7 | 5000 | 0,714$\frac{2}{7000}$
13(2

Wenn $\frac{5}{7}$ Theile vom Thaler sind, so zeigt der angehängte Bruch, daß, wenn man einen Thaler in 7000 gleiche Theile theilte, die Unrichtigkeit des Decimalbruchs, zween solcher Theilgens beträgt, welches noch nicht der zwölfte Theil eines Pfennigs ausmacht.

Beweis.

Wenn ein Rest überbleibt, so ist der Zehler des Decimalbruchs ein unreiner Bruch. Drückt man den Nenner aus, so ist der Decimalbruch des letzten Exempels $0,\frac{7147^{2}}{1000}$. Der überbliebene Rest, oder der Zehler 2, muß ebenfalls durch den Nenner 1000 dividirt werden. Dieses geschieht durch die Multiplication am Nenner, denn eine Multiplication am Nenner, ist eine Division am Zehler, folglich ist der Bruch $\frac{2}{1000}$.

Ob man gleich den Bruch, welcher aus dem Reste sich ergiebt, nicht mit berechnet, weil er die Arbeit zu beschwerlich macht, so dienet er doch dazu, um die Größe der Unrichtigkeit bestimmen zu können. Läßt man aber diesen Bruch außer Acht, weil die Unrichtigkeit nie so groß ist, als der Werth einer Einheit der letzten Ziffer des Decimalbruchs beträgt. Z. E. wäre in Bestimmung des Bruchs 0, 3452 ein Rest überblieben; so würde dieser Rest deswegen nicht den zehntausendsten Theil einer Einheit betragen, weil die 2, zehntausend Theilgen sind.

§. 175.

Wenn nicht folgendes beobachtet wird, so werden zween Fälle, bey der Verwandelung eines Bruchs in einen Decimalbruch, zu leicht einen fehlerhaften Ausdruck veranlassen.

Diejenige Nulle, oder die geltende Ziffer, welche vor dem Comma ihren Platz erhält, ist der Quotient

des

des Nenners in seinem Zehler. Nun hänge man dem Zehler nur eine Nulle an, und dividire durch den Nenner; hat man wieder zum Quotienten o, so kömmt diese hinter das Comma. Dis wiederhole man so lange, bis man zum Quotienten eine Ziffer erhält. Z. E.

$\frac{2}{367}$ 367 | 20000 | 0,0054$\frac{182}{367\,0000}$
1835 |
1650
1468
182

376 in 2 war o. Dis ist die o vor dem Comma. Nun folgen deswegen hinter dem Comma noch zwo Nullen, weil der Nenner 376 nicht in 20, auch nicht in 200 steckt.

§. 176.

Der Quotient des Nenners in den Zehler, kömmt immer vors Comma. Z. E.

$\frac{8}{3}$ 3 | 8000 | 2,666
2222

Weil der Nenner 3 in dem Zehler 8 zweymal steckt, so erhält diese 2 ihren Platz vors Comma.

Die Null, welche bey der Verwandelung eines ächten Bruchs, vor dem Comma ihren Platz hat, wird nie mit berechnet. Denn diese Null zeigt nur an, daß keine Ganze da sind.

§. 177.

Einen unächten Bruch in einen unreinen verwandeln.

Man drücke den gegebenen Bruch in einem Decimalbruch aus; so ergeben sich die Ganzen in demselben, von selbst.

$\frac{77}{2}$ ist 38, 5 $\frac{374}{3}$ ist 124, 66

§. 178.

Einen unreinen Bruch in einen unächten Decimalbruch verwandeln.

Man verwandle den angehängten Bruch in einen Decimalbruch; setze die Ganzen ohne Comma vor den gefundenen Bruch, und behalte den Nenner des Decimalbruchs.

$373\frac{24}{64}$ 64 | 24000 | 0,375 ist $^{37}\frac{3375}{1000}$

Beweis.

Dadurch, daß man die gegebene Zahl, mit dem Zehler des Decimalbruchs ohne Comma zusammen hänget, multiplicirt man die Zahl durch 10, 100, oder 1000, nachdem nämlich der Zehler des Bruchs, eine, zwo, oder drey Decimalstellen hat; denn die Ziffern der ganzen Zahl, welche Einer waren, sind nun Zehner, Hunderter oder Tausender geworden. Nun aber müssen die multiplicirten Ganzen, durch dieselbe Zahl wieder dividirt werden, durch welche sie multiplicirt sind, wenn es dieselbe Zahl bleiben soll, daher giebt man ihr den Nenner des Decimalbruchs zum Nenner.

§. 179.

Decimalbrüche zu addiren.

Man addire die Posten, ohne aufs Comma zu sehen, wie ganze Zahlen. In der Summe schneide man rechter Hand, durchs Comma, so viele Decimalstellen ab, als der Posten Decimalstellen hat, welcher die mehresten Decimalstellen hat.

$\frac{1}{2}$	. .	0, 5	$\frac{23}{1000}$	. .	0, 023
$211\frac{4}{5}$	. .	211, 8	$\frac{1}{5}$	. .	0, 2
$\frac{1}{16}$	. .	0, 062	$\frac{2}{3}$	. .	0, 6666
$\frac{3}{4}$	. .	0, 75	16	. .	16, 0
Summe		213, 112	$3\frac{1}{2}$	. .	3, 5
			Summe		20, 3896

Beweis.

Weil die Zehntheilgens zu den Einern der ganzen Zahl, sich eben so verhalten, wie die Einer sich zu den Zehnern verhalten, so trägt man das, aus den Zehntheilen im Sinn behaltene sowol zu den Einern der ganzen Zahl über, als man das aus den Einern im Sinn behaltene, zu den Zehnern, und das aus den Zehnern, zu den Hundertern überträgt. Und weil man hinter einem Decimalbruche, ohne Veränderung seines Werths, so viele Nullen schreiben kann, als man will (§. 166.); so konnte man einem jeden Posten, durch angehängte Nullen, so viele Decimalstellen geben, als der Bruch hat, welcher die mehresten Decimalstellen hat, alsdenn wären alle Nenner gleich. Weil aber die Posten so wenig, als die Summe, durch diese Nullen verändert würden, so wäre es eine überflüßige Arbeit, sie hin zu schreiben.

§. 180.

Decimalbrüche zu subtrahiren.

Man schreibe die Zahlen so unter einander, daß die Ziffern von gleichem Range, unter einander stehen.

Nun subtrahire man, ohne aufs Comma zu achten, wie man in ganzen Zahlen subtrahirt, das Comma setze man im Reste, unter die Commata der obern Zahlen.

Hat der Bruch, welcher Abzug leiden soll, weniger Decimalstellen, als derjenige hat, welcher subtra-

hirt wird; so hänge man dem obern Bruche so viele Nullen an, als Decimalstellen fehlen.

Soll von einer ganzen Zahl ein Bruch subtrahirt werden; so schreibe man hinter das Comma der ganzen Zahl, so viele Nullen, als nöthig sind, und subtrahire wie in ganzen Zahlen. Ueberhaupt kann man immer beliebige Nullen hinter einen Decimalbruch hängen, wenn die Bequemlichkeit es fordert.

von $\frac{3}{4}$	. .	0,750	von 26	. .	26,0,
$\frac{1}{8}$	. .	0,125	$\frac{3}{5}$	. .	0,6
Rest		0,625	Rest		25,4

von $17\frac{7}{5}$	. .	17,20	von 600,000		
$3\frac{1}{4}$	. .	3,25		7,369	
Rest		13,95	Rest		592,631

von 16,000			von 3,040		
	0,004			2,009	
Rest		15,996	Rest		1,031

Beweis.

Weil 1 Einer sowol 10 Zehntheile, als 1 Tausender 10 Hunderter hat; so borgt man so gut aus den Einern in die Zehntheile, als man aus den Tausendern in die Hunderte borgt; man borgt daher über das Comma weg.

§. 181.

Decimalbrüche zu multipliciren.

Die Ziffern der Decimalbrüche sehe man an, als wären sie mit den Ziffern der vor denselben befindlichen Ganzen, nur eine zusammenhängende Zahl, und multiplicire, wie man mit ganzen Zahlen multiplicirt.

Im

Im Produkte schneide man so viele Decimalstellen ab, als beyde Factoren Decimalstellen haben.

Beweis.

Die Anzahl Nullen, welche der Nenner eines Decimalbruchs hat, bestimmt die Anzahl der Decimalstellen des Zehlers. Nun multiplicirt man Bruch durch Bruch, wenn man Zehler durch Zehler, und Nenner durch Nenner multiplicirt; das Produkt der Nenner zweyer Decimalbrüche, ist immer eine 1 mit so vielen Nullen, als beyde Factoren Nullen haben, folglich hat auch der Zehler eben so viele Decimalstellen.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$ ist 0, 5
0, 8
Prod. 0, 40

$\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2}$ ist 3, 5
0, 75
175
245
Produkt 2, 625

§. 182.

Aus (§. 163.) wird man sich erinnern, daß eine bestimmte Anzahl Nullen immer vor dem Decimalbruche, und eine unbestimmte Anzahl hinter demselben, geschrieben werden müsse. Erfolgen daher im Produkte nicht so viele Ziffern, als beyde Factoren Decimalstellen haben; so ersetze man die fehlenden Stellen, durch vorgesetzte Nullen.

0, 005	2, 36	3, 754
0, 03	0, 02	0, 005
Prod. 0, 00015	Pr. 0, 0472	0, 018770

§. 183.

Ob man gleich auf die Nullen, welche vor einem Decimalbruche stehen, im Multipliciren nicht zu achten

braucht: so müssen sie doch in dem Falle, wenn noch ganze Zahlen vor denselben sind, mit berechnet werden. Denn, da die Brüche mit dem Ganzen, als eine zusammenhängende Zahl angesehen werden; so bleiben in diesem Falle die Nullen vor den Brüchen keine Endnullen; sondern es werden Mittelnullen, welche man nie aus der Acht lassen darf.

	6, 0007	8, 0003	33, 043
	0,09	2,004	0,2
Prod.	0,540063	320012	Pr. 6, 6086
		16000600	
		Prod. 16,0326012	

§. 184.

Multiplicirt man aber einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl, die am Ende Nullen hat; so verstehet es sich von selbst, daß man diese Nullen mit ins Produkt nehmen müsse; denn das Comma erhält durch sie einen andern Platz, als wenn sie fehlen. Ist aber das Comma gehörig bestimmt; alsdenn kann man die Endnullen, welche sich hinter dem Decimalbruche befinden, als überflüßig wegstreichen.

	4, 03	4, 7395
	500	430
Prod.	2015,00	1421850
		189580
		Prod. 2037, 9850

§. 185.

Decimalbrüche zu dividiren.

1) Man sehe, ohne aufs Comma zu achten, beyde Decimalbrüche mit ihren etwa vor sich habenden Gan-

zen,

zen, als ganze Zahlen an. Hat nun der Dividendus mehr Decimalstellen, als der Divisor; so dividire man, wie man ganze Zahlen dividirt.

2) Geht die Division auf, so hat man den Quotienten genau, und man schneidet im gefundenen Quotienten durchs Comma so viele Decimalstellen ab, als der Dividendus mehr Decimalstellen, als der Divisor hat.

3) Bleibt aber in der Division ein Rest, so hänge man dem Dividendus beliebige Nullen an, und setze die Division weiter fort. Oder man hänge, wenn man eine größere Schärffe nicht sucht, dem gefundenen Quotienten einen Bruch an, dessen Zehler der Rest, dessen Nenner aber, der Divisor mit so vielen Nullen ist, als im gefundenen Quotienten Decimalstellen sind.

Dieser angehängte Bruch dienet nur dazu, daß man die Größe der Unrichtigkeit bestimmen könne. Ist der Fehler noch zu groß, so hänge man noch 1 oder einige Nullen an, und setze die Division fort. Denn durch je mehr Ziffern man den Quotienten ausdrückt, um desto unbeträchtlicher wird der Fehler, wenn er auch, wie oft geschieht, nie ganz verschwindet.

4) Hat der Divisor eben so viel, oder mehr Decimalstellen, als der Dividendus, so hänge man dem Dividendus so viele Nullen an, daß er in allem mehr Decimalstellen, als der Divisor erhalte. Dieses ist deswegen nothwendig, damit man im Quotienten dem Comma nach (2) seinem gehörigen Platz geben könne. Z. E. hat der Divisor zwo, der Dividendus drey Decimalstellen, so müssen dem ersteren zum wenigsten zwo Nullen angehangen werden.

$\frac{3}{4}$ div. $\frac{1}{2}$ 0,5 | 0,75 | 1,5

2

2,5

```
2,5 | 3,7650 | 1,506
    | 25 |  ||
    |----|  ||
    | 126|  ||
    | 125|  ||
    |----|  ||
    |  150|  ||
    |  150|  ||
    |-----|  ||
    |    0|  ||

0,3 | 2,45 | 8,16666 3/300000
    |  20  |
    |  20  |
    |  20  |
    |  20  |
    |   2  |
```

In diesem Exempel hat der Dividendus eine Decimalstelle mehr, als der Divisor. Außerdem ist die Rechnung noch durch vier angehängte Nullen fortgesetzt, folglich hat der Dividendus fünf Decimalstellen mehr, als der Divisor, daher sind im Quotienten fünf Decimalstellen abgeschnitten. Der angehängte Bruch zeigt die Größe der Unrichtigkeit. Sie ist so geringe, daß, wenn der Dividendus Centner wären; so würde der gefundene Quotient ohne den Bruch, noch nicht um den eilften Theil eines Quentgens, zu klein seyn. Wollte man diesen kleinen Rest noch nicht verloren geben; so dürfte man den Quotienten, um der Wahrheit noch viel näher zu kommen, durch eine angehängte Nulle weiter finden. Der angehängte Bruch ist nie so groß, als eine Einheit der letzten Decimalstelle im Quotienten.

Beweis der Division.

Wenn man Bruch durch Bruch dividirt, so kann die Division dadurch geschehen, daß man den Zehler

und

und Nenner des Dividendus, durch den Zehler und Nenner des Divisors dividirt. Der Quotient aus den Zehlern ist der gefundene Quotient des Decimalbruchs. Der Quotient der Nenner in Decimalbrüchen, ist eine 1 mit so vielen Nullen, als der Dividendus mehr, als der Divisor hat. Diese Anzahl Nullen aber, bestimmet die Anzahl der Decimalstellen im Zehler.

$\frac{4}{7}$ div. $\frac{1}{364}$ oder 0,8 div. 0,0027

0,0027 | 0,80000 | 296,2$\frac{26}{178}$

54
260
243
170
162
80
54
26

Will man eine Division durch angehängte Nullen weiter fortsetzen, so ist es gleichgültig, ob man sie dem Dividendus anhängt, oder ob man eine Null nach der andern, dem Reste zufügt.

§. 186.

Wird der gefundene Quotient durch den Divisor multiplicirt, und der überbliebene Rest zum Produkte addirt; so erscheint, wenn man recht dividirt hat, wie in ganzen Zahlen, der Dividendus. Die Probe der Multiplication ist, wie in ganzen Zahlen, die Division. So ist auch, wie in ganzen Zahlen, die Addition, die Probe der Subtraction, und die Subtraction die Probe der Addition.

Noch ein paar Exempel der Diviſion.

0,06 div. 0,005

0,005 | 0600 | 12,0
1

Probe
12, 0
5
0, 0600

7,04 div. 362

362 | 7,04 | 0,0194
1
362
3420
3258
1620
1448
172

Probe
194
362
388
1164
582
70228
172
7,0400

362 div. 704

7,04 | 362000 | 51,4
3520
1000
704
2960
2816
144

3 div. 24,5

24,5 | 3,00 | 0, 122
245
550
490
600
490
110

Wenn ein Decimalbruch durch 10, 100, 1000 u. ſ. w. multiplicirt oder dividirt werden ſoll: ſo darf man nur das Comma im erſten Falle um ſo viele Stellen als der Multiplicator Nullen hat, rückwärts, im andern Falle um ſo viele Stellen vorwärts ſetzen. Z. E. $\frac{3}{4}$ oder 0,75 ſoll multiplicirt und dividirt werden.

multi-

multiplicirt	dividirt
0,75	0,75
10.7,5	10..0,075
100.75,	100..0,0075
1000.750,	1000..0,00075
10000.7500,	10000..0,000075

Achtes Kapitel.

Von der Kettenregel.

I. Abschnitt.

§. 187.

Was die Kettenregel eigentlich sey.

Es ist schon im vierten Kapitel so viel von der Kettenregel gesagt, als zum Verständnisse jener einfachen Aufgaben nöthig war. Um nun alles, was dort gesagt ist, hier nicht noch einmal wiederholen zu dürfen, setze ich zum voraus, daß man jenes schon wisse, oder es nachlese.

Was ist nun eigentlich die Kettenregel? Wenn die Aufgabe drey Zahlen bekannt macht, durch welche die vierte gesuchte Zahl gefunden werden soll; so ist sie das Suchen, der vierten geometrischen Proportionalzahl, zu drey gegebenen. Sie ist in diesem Falle von der Regel Detri nur blos der Form nach unterschieden. Enthält aber die Aufgabe mehr, als drey gegebene Glieder, so läßt sich die Antwort auf die Frage: Was ist die Kettenregel? erst geben, nachdem zuvor verschiedenes von dieser so wichtigen Lehre gesagt ist.

§. 188.

§. 188.

Eine jede Aufgabe, welche durch die Kettenregel aufgelöset wird, besteht aus drey, fünf, sieben, neun u. s. w. gegebenen Zahlen, nie aber aus einer ebenen Anzahl. Besteht eine Aufgabe nur aus dreyen gegebenen Zahlen, und einem Namen; so soll zu diesen dreyen Zahlen die vierte Proportionalzahl gefunden werden, und der Name, ist der Name des gesuchten vierten Gliedes, oder des Facits. Eine solche Aufgabe, kann man eine Einfache Aufgabe nennen. Z. E. wieviel Thaler ist das Capital groß, welches jährlich 65 Thal. Zinse giebt, wenn 100 Thaler 4 Thal. Zinse geben? Das ist: man soll eine Zahl finden, die sich zu den 100 Thalern Capital verhält, wie sich 65 Thaler Zinse zu 4 Thal. Zinse verhalten; oder, welches dasselbe ist: man soll eine Zahl finden, in welcher 100 so oft steckt, als 4 in 65 enthalten ist. Der gewöhnliche Ausdruck dieses Satzes, in Form einer Proportion, und in Form der Kettenregel, wäre

4 Thal. Zinse : 65 Thal. Z. = 100 Cap. : C.

1 Thal. Cap.	. . 65 Thal. Zinse
4 Zinse	. . 100 Thal. Cap.

Dieser verschiedene Ausdruck zeigt, daß die Theil-Columne der Kettenregel das erste und das gesuchte letzte Glied, die andere, das zweyte und dritte Glied einer geometrischen Proportion in sich fasse.

§. 189.

Enthält eine Aufgabe fünf, sieben, neun, oder mehrere gegebene Zahlen; so besteht sie aus einem Proportionalsatze, und aus so vielen Verhältnissen, als über drey Zahlen, noch Paare da sind. Die drey Glieder der Proportion, nennet man den Hauptsatz.

§. 190.

§. 190.

Die Bedingungen der Aufgabe, welche die Verhältnisse ausmachen, sollen die gesuchte vierte Proportionalzahl abändern; daher multiplicirt man durch sie ein paar harmonische Glieder der Proportion (§. 68.). Durch den nachfolgenden Beweis der Kettenregel, wird dieses mehrere Klarheit erhalten. Ich will obigem einfachen Exempel die Bedingung hinzufügen, daß ein gesuchtes Capital so groß seyn soll, daß es in $\frac{1}{4}$ Jahre 65 Thaler Zinse bringe; oder, wieviel Thaler ist das Capital groß, welches in $\frac{1}{4}$ Jahre 65 Thaler Zinse bringt? Wenn 100 Thal. in einem Jahre 4 Thaler geben.

4 Thal. Zinse : 65 Thal. Z. = 100 Thal. Cap. : C.
$\frac{1}{4}$ Jahr 1 Jahr

1 Thal. Cap.	.	.	65 Thal. Zinse
4 Thal. Zinse	.	.	100 Cap.
$\frac{1}{4}$ Jahr	.	.	1 Jahr

Die beyden obersten Reihen der Kettenregel machen die Proportion, die unterste Reihe, das Verhältniß aus.

Ich will noch ein Exempel in Form einer Proportion, und durch die Kettenregel ausdrücken; 7 Pfund kosten 5 Thaler, wieviel Groschen kosten 3 Loth?

Diese Aufgabe besteht aus einer Proportion, und aus zwey Verhältnissen. Obgleich die Verhältnisse nicht in der Aufgabe ausgedrückt sind, so liegen sie doch darin. Weil man zum voraus setzen konnte, daß das Verhältniß zwischen Thalern und Groschen, zwischen Pfunden und Lothen bekannt sey, so war es unnöthig, in der Aufgabe mit anzuzeigen, daß 1 Thal. 36 Gr. und 1 Pfund 32 Loth habe.

7 Pf. : 3 Loth = 5 Thal. : Gr.
1 Thal. — — 36 Gr.
32 Loth 1 Pf.

1 Gr.	. .	3 Loth
7 Pf.	. .	5 Thal.
1 Thal.	. .	36 Gr.
32 Loth	. .	1 Pf.

Nun kann man, ohne Nachtheil des Resultats, die harmonischen Glieder einer Proportion, durch eine gleiche Division verkleinern (§. 67.), daher verkleinere man in der Proportion die Factoren des ersten Gliedes, gegen die Factoren des zweyten und dritten Gliedes; in der Kettenregel die Factoren der einen Columne, gegen die Factoren der andern, hierdurch erhält man:

7 Pf. : 3 Loth = 5 Thal. : Gr.
8 Loth 9 Gr.

1 Gr.	. .	3 Loth
7 Pf.	. .	9 Gr.
8 Loth	. .	9 Gr.

Durch die Multiplication der Factoren des ersten Gliedes durcheinander, und der Factoren des dritten Gliedes durcheinander; und durch die Multiplication der Glieder einer jeden Columne durcheinander, werden die Pfunde zu Lothen, und die Thaler zu Groschen abgeändert. Setzt man nun, statt der Factoren, die Produkte; so erhält man folgendes.

56 Loth : 3 Loth = 45 Gr. : Gr. 1 56 . . 135

Nun wird das vierte Glied einer geometrischen Proportion gefunden, wenn das Produkt des zweyten und dritten Gliedes durchs erste Glied dividirt wird. Das vierte Glied, oder das Facit ist $2\frac{23}{56}$ Gr.

Da die Factoren des zweyten und dritten Gliedes die Multiplicationscolumne der Kettenregel ausmachen, so sind durch die Multiplication der Factoren dieser Columne

lumne, die Factoren des zweyten und dritten Gliedes der Proportion, multiplicirt. Das Produkt dieser Columne, darf also nur, um das Facit zu erhalten, durchs Produkt der Theilcolumne dividirt werden.

Die Kettenregel ist also: **Wenn die vierte gesuchte Proportionalzahl einer geometrischen Proportion, durch die Bedingungen, welche eine Aufgabe enthält, so oft zweckmäßig abgeändert wird, als Bedingungen da sind.**

Wie weit müssen sich nicht die Grenzen der Kettenregel erstrecken, da die Abänderung auf unzählige Art geschehen kann.

II. Abschnitt.

§. 191.

Beweis der Kettenregel.

Da ein Beweis nichts anders ist, als daß man in demselben zeigt, wie dasjenige, was bewiesen werden soll, durch ein gewisses Verfahren nothwendig erfolgen müsse; so liegt schon der Beweis der Kettenregel in demjenigen, was im ersten Abschnitte gesagt ist. Ich darf also das schon gesagte nur mehr ins Licht setzen.

§. 192.

Werden ein paar harmonische Glieder einer geometrischen Proportion, durch ein paar Zahlen multiplicirt, so verhalten sich die beyden vierten Proportionalzahlen, welche vor und nach der Multiplication erfolgen, gegen einander, wie sich die Multiplicatoren gegen einander verhalten. Z. E.

2 : 4 = 5 : 10 10 : 20 = 1 : 2
1 : 2

2 : 8 = 5 : 20

Die Bedingungen einer Aufgabe sind diese Multiplicatoren. Die Theilcolumne der Kettenregel aber, besteht aus den Factoren des ersten Gliedes, die Multiplicationscolumne aus den Factoren des zweyten und dritten Gliedes einer Proportion. Werden nun die Glieder einer jeden Columne durcheinander multiplicirt, und das Prpdukt der zweyten Columne durchs Produkt der ersten dividirt; so wird die vierte Proportionalzahl, oder das Facit des Hauptsatzes dahin abgeändert, als sie vermöge der gegebenen Bedingungen, abgeändert werden soll.

Es muß also nur ein Resultat erfolgen, man mag eine Aufgabe durch die Kettenregel auflösen, oder man mag den Hauptsatz in Form einer Proportion ausdrücken, und durch die gegebenen Bedingungen die harmonischen Glieder dieser Proportion nach einander multipliciren, die Produkte als die Glieder selbst ansehen, und das vierte Glied suchen. Um solches zu zeigen, mag die gewählte Aufgabe diese seyn.

Wieviel Groschen Cassengeld kostet eine Bouteille Wein, wenn 2 Orhoft 90 Thlr. Gold kosten?

Nach der Kettenregel.

1 Gr. Cassg.	. .	1 Bouteille	
2 Orhoft	. .	90 Thal. Gold	
6 Ancker	. .	1 Orh.	
40 Bouteillen	. .	1 Ancker	
1 Thal.	. .	36 Gr.	
15 Gold	. .	14 Cassg.	Fac. $6\frac{3}{10}$ Gr. Cssg.

Soll diese Aufgabe durch einen, durch die Bedingungen abgeänderten Proportionalsatz, aufgelöset werden;

den; so hat man, um regelmäßig zu verfahren, nur dieses zu beobachten. Wenn die gesuchte vierte Proportionalzahl durch eine Bedingung größer wird; so erhält die größeste Zahl der Bedingung, ihren Platz unter das zweyte Glied der Proportion; soll sie kleiner werden, so muß die kleinste Zahl der Bedingung, den zweyten Platz einnehmen, denn mit dem zweyten Gliede, wächst das gesuchte vierte Glied.

2 Orh. : 1 Orh. = 90 Thl. Gold : Fac. 45 Th. Gold
6 Anker : 1 Orh.

12 Ank. : 1 Ank. = 90 Thl. Gold : Fac. $7\frac{1}{2}$ Thl. Gold
40 Bout. 1 Ank.

480 Bout. : 1 Bout. = 90 Thl. Gold : Fac. $\frac{3}{16}$ Thl. Gold
1 Thl. : 36 Gr.

480 Bout. : 36 B. = 90 Thl. Gold : Fac. $6\frac{3}{4}$ Gr. Gold
15 Gold : 14 Cssg.

7200 : 504 = 90 Fac. $6\frac{3}{16}$ Gr. Cassg.

Das Facit des Hauptsatzes bestimmet den Werth eines Orhofts, in 45 Thal. Gold. Um nun den Werth eines Ankers, als $7\frac{1}{2}$ Thal. zu erhalten, ist das erste und zweyte Glied, durch ein paar Zahlen multiplicirt, die sich gegen einander, wie Orhoft zu Anker, verhalten. Man wollte aber den Werth von einer Bouteille wissen, daher mußten die Vorderglieder weiter durch zwo Zahlen, die sich wie Anker zu Bouteillen verhalten, multiplicirt werden. Den Werth einer Bouteille, fand man $\frac{3}{16}$ Thal. Gold. Um diesen Werth in Groschen ausgedrückt zu bekommen, mußte die Multiplication weiter, durch 1 und 36, angestellet werden, man erhielte zum Facitte $6\frac{3}{4}$ Gr. Gold. Weil man aber diesen Werth in Cassengelde wissen wollte, so geschah zuletzt die Multiplication der harmonischen Glieder, durch 14 und 15, als das Verhältniß zwi-

schen Cassengeld und Gold. Die vierte Proportionalzahl zeigte, in $6\frac{3}{10}$ Gr. Casseng. dasselbe Facit, welches man durch die Kettenregel erhalten hatte.

Da man nun durch die Kettenregel nur das letzte Facit, nicht die Zwischenfacitte wissen will; so braucht man nur blos das erste Paar der Glieder des Hauptsatzes einer Aufgabe, durch alle Bedingungen derselben, zu multipliciren, und zu den Produkten und zu dem dritten Gliede die vierte Proportionalzahl zu suchen.

Dis Verfahren aber ist nichts anders, als ein Exempel durch die Kettenregel auflösen.

Es ist in der That zu bewundern, daß nicht ein jeder die Kettenregel erfunden hat, der den Satz, daß die vierte Proportionalzahl in demselben Verhältnisse abgeändert werde, als sich die Zahlen zu einander verhalten, welche ein paar harmonische Glieder einer Proportion multipliciren, fürs gemeine Leben hat brauchbar machen wollen. Vielleicht ist dieser wichtige Gegenstand so nahe vor den Füßen der Untersucher gewesen, daß sie über denselben weggesehen haben.

III. Abschnitt.

§. 123.

Vom Ordnen der Kettenregel.

Die einzige Schwierigkeit, welche sich bey der Kettenregel zuweilen zeigt, besteht darin, daß es zweifelhaft werden kann, in welche Columne man die Glieder eines verwickelten Exempels setzen soll. Diese Schwierigkeit aber ist bey allen übrigen Rechnungsarten noch weit beträchtlicher.

Folgende Regeln werden einen jeden sicher stellen, daß er im Setzen keinen Fehler begehen wird.

I. Regel.

I. Regel.

Die Glieder welche unmittelbar in einander würken, erhalten ihren Platz in verschiedenen Columnen. Z. E. 3 Pfund kosten 4 Thal. mehrere Pfunde würden mehrere Thaler würken.

1 3 Pfund . . . 4 Thlr.

II. Regel.

Eine jede Frage, die vollständig ist, hat zum wenigsten zwey Theile 1) die Frage selbst, 2) worauf sich die Frage erstreckt. Z. E. wieviel Groschen ist nun der erste Theil der Frage. Die Frage wird erst vollständig, wenn der zweyte Theil hinzugefügt wird. Wieviel Gr. sind $\frac{4}{7}$ Thaler? Man fängt ein jedes Exempel mit der Frage an. Diese Frage, oder was man wissen will, kömmt in die Theilcolumne, der zweyte Theil, oder worauf sich die Frage erstreckt, in die Multiplicationscolumne. Z. E.

1 Gr. . . $\frac{4}{7}$ Thlr.

Wieviel Pf. erhält man vor 9 Gr. 1 Pf. — 9 Gr.
Wieviel Thlr. sind 19 Ducaten? 1 Thl. — 19 Duc.
Wieviel Pfund ziehen 4 Pferde? 1 Pf. — 4 Pferde

III. Regel.

Oft hat eine vollständige Frage mehr, als zwey Glieder. Z. E. wieviel Stück spinnen 8 Mädgen in 6 Wochen? nicht die Anzahl der Mädgen allein, sondern auch die Zeit, welche sie arbeiten, beyde zugleich würken die Stücke. Daher müssen die Mädgen und Wochen den Stücken gegenüber gesetzt werden.

$$1 \text{ Stück} \; — \; — \; \begin{cases} 8 \text{ Mädgen} \\ 6 \text{ Wochen} \end{cases}$$

Wieviel Arbeiter verfertigen in 8 Wochen, wenn sie wöchentlich 4 Tage, und täglich 6 Stunden arbei-

ten, eine Mauer die 3 Ruthen lang, 2 Fuß dick, und 5 Fuß hoch ist? Die würkende Ursache ist die Anzahl der Arbeiter, mit der Länge der Zeit; die Würkung ist die Mauer mit ihrer Länge, Höhe und Dicke.

Regel.

Die würkende Ursache mit ihren Umständen, dürfen so wenig getrennet, und in verschiedene Columnen gebracht werden; als die Würkung mit ihren Umständen in verschiedene Columnen gebracht werden dürfen.

Länge und Breite machen zusammen genommen nur eine Fläche; Länge Breite und Dicke, nur Einen Körper aus. Dinge aber, die zusammen gehören, die ein Ganzes ausmachen, dürfen nicht von einander gerissen und in verschiedene Columnen gebracht werden.

Der Cubiczoll Ebenholz ist bedungen zu 1 Gr. wieviel Thaler kostet 1 Balken der 4 Fuß lang, 8 Zoll breit, und 6 Zoll dick ist?

1 Thlr.	— —	4 Fuß 8 Zoll 6 Zoll
1 Zoll 1 Zoll 1 Zoll	— —	1 Gr.
1 Fuß	— —	12 Zoll
36 Gr.	— —	1 Thlr.

IV. Regel.

Zuweilen ist es nicht zu bestimmen, welche Dinge in einander würken. Z. E. wieviel wiegt ein 9 Groschen Brodt, wenn der Hinten Rocken 27 Gr gilt? Hier würkt der Preis des Brodts sowol die Pfunde desselben, als der Preis des Rockens die Pfunde des Brodts bestim-

bestimmet. In diesem Falle, und in allen möglichen Fällen, verläßt die hier folgende Regel nie.

Wenn das Abnehmen der einen Zahl, das Wachsen der andern verursacht; so kommen diese sich beraubende Zahlen in eine Columne. Wenn hingegen eine Zahl mit der andern gegebenen Zahl wächst, so kommen diese mit einander wachsende Zahlen in verschiedene Columnen.

Exempel der ersten Art wären: je mehr das Korn gilt, desto weniger Pfunde Brodt giebt der Becker fürs Geld. Je mehr Hände arbeiten, desto kürzere Zeit arbeiten sie an einem Werke. Je mehr Pfund ein Fuhrmann geladen hat, desto weniger Meilen fährt er für ein gewisses Geld. Je größer das Capital ist, desto kürzere Zeit kann es für ein bestimmtes Geld behalten werden. Je breiter die Leinewand ist, desto weniger Ellen gebraucht man zu einem Kleide. Je mehr Menschen von 100 Himten leben, desto kürzere Zeit leben sie davon u. s. w. Diese sich beraubende Größen, kommen in eine Columne bey einander.

1 Arbeiter, 6 Wochen — Werk,
1 Pfund, 8 Meilen — 5 Thl.
1 Thlr. Cap., 8 Monat — Zinse
1 Ellen lang, 3 Ellen breit — Kleid,
1 Menschen, 6 Monat — — 100 Himten

Wenn hingegen eine Zahl größer angenommen wird, und die andere Zahl wird dadurch ebenfalls größer, so kommen diese mit einander wachsende Zahlen in verschiedene Columnen. Z. E.

Wieviel Pfund erhält man für 4 Thlr.

1 Pfund . . 4 Thlr.

Wieviel Thaler Zinsen geben 300 Thlr. Capital?

1 Thlr. Zinse . . 300 Thl. Cap.

Wieviel Thaler sind 72 Gulden?

1 Thlr. . . 72 Gulden

Für mehrere Thaler erhält man mehrere Pfunde; wäre das Capital größer, so würden auch die Zinsen größer seyn; mehrere Gulden würden mehrere Thaler geben.

Solche Glieder, deren einige zusammen genommen, eine Sache würken, kann man verbundene Glieder nennen. Alle verbundene Glieder, sie mögen in einer oder in der andern Columne befindlich seyn, müssen sich berauben.

Die erste und dritte Regel, sind nur mithelfende Regeln, man könnte sie allenfalls entbehren. Diese vierte Regel aber ist unentbehrlich, sie ist die hauptsächlichste von allen, sie läßt keinen Zweifel über, wie man auch das verwickeltste Exempel setzen soll, und man kann nach dieser Regel sogleich ein geordnetes Exempel untersuchen, ob man es recht geordnet habe. Folgendes Exempel wird das jetzt gesagte völlig ins Licht setzen.

Ein Feld, das 24 Ruthen lang, und 15 Ruthen breit ist, giebt des Jahrs 12 Thaler Pacht, wenn nämlich ein Himten Korn 1 Thlr. gilt; wieviel Pacht muß 1 Feld geben, daß 27 Ruthen lang, 12 Ruthen breit ist, wenn der Himten 1 Thlr. 8 Gr. gilt?

Wieviel Thaler? ist die Frage, deren Antwort man wissen will.

1 Thlr. — — { 27 Ruthen / 12 Ruthen / $1\frac{2}{5}$ Thlr.

Warum aber kömmt die Länge und Breite des Feldes, nebst dem Kornpreise nicht in die Theilcolumne? Weil

Weil die Thaler der Theilcolumne wachsen, wie der Kornpreis und die Größe des Feldes wachsen würden. Und diejenigen Zahlen, welche mit einander zu oder abnehmen, wie eine von denselben zu oder abnimmt, kommen in verschiedene Columnen. Warum kömmt die Länge und Breite des Feldes, nebst dem Fruchtpreise in eine Columne bey einander? Weil das Wachsen der einen Zahl, das Abnehmen der andern verursacht, und Zahlen, die sich so berauben, kommen in eine Columne. Wenn der Kornpreis stiege; so würde ein kleineres Feld denselben Pacht geben, und es könnte weniger breit seyn, wenn es um desto länger wäre.

V. Regel.

Ist der erste Theil eines Exempels richtig geordnet; so ordnet sich der zweyte Theil von selbst, wenn man nur die Namen, welche im ersten Theile in der Theilcolumne ihren Platz haben, im zweyten Theile in die andere Columne bringt, und umgekehrt. Hierauf werden die Bedingungen, z. E. wenn man 10 auf 100 gewinnen will, regelmäßig untergesetzt.

Hier aber zeigt sich, wiewol selten, ein Fall, der Schwierigkeiten hat. Z. E.

Ein Gerber kauft 860 Häute, er giebt für 10 Stück 8 Thaler, und für 104 Stück bezahlt er nur 100 Stück, wieviel Geld entrichtet er für 860 Häute?

1 Thlr. . . 860 Stück
10 Stück . . 8 Thlr.

Bis hieher zeigt sich keine Schwierigkeit. In welche Columne aber müssen die 100 und 104 Stück gesetzt werden? Die Aehnlichkeit der Namen giebt hier keine Richtschnur ab. Weil aber der Käufer, vermöge der Zugabe von 4 Stück auf 100 gewinnen soll, so giebt er weniger Geld aus, als wenn er diese Zugabe

nicht

nicht empfangen hätte; folglich soll durch diese Bedingung das Facit kleiner werden. Je größer aber die Theilcolumne ist, desto kleiner wird das Facit, denn ein größerer Divisor giebt einen kleinern Quotienten, und das Produkt der Theilcolumne ist der Divisor. Man muß daher in diesem Falle, die größeste Zahl, nemlich 104, in die Theil- und die kleinste 100 in die Multiplicationscolumne setzen. Die Regel ist also diese:

Regel.

Soll durch eine Bedingung, deren Platz der Glieder, die Gleichheit der Namen nicht bestimmt, das Facit kleiner werden; so setze man die größeste Zahl dieser Bedingung in die Theilcolumne; soll das Facit größer werden, so setze man die kleinste Zahl in die Theilcolumne, die größeste in die andere Columne.

VI. Regel.

Will man zwey Dinge von verschiedener Güte, von verschiedenem Maaße oder Werthe einander gleich machen, will man sie gegen einander vertauschen; so setze man die Umstände, welche zu einer Sache gehören, ohne auf die Gleichheit der Namen zu achten, in eine Columne beysammen, und alles, was zur andern Sache gehört, in die andere Columne.

Weil es hier blos auf den verschiedenen Werth der Dinge, welche mit einander vertauscht werden sollen, ankömmt; so ist die Aehnlichkeit der Namen unnöthig. Ist aber der Werth in verschiedenen Geldsorten bestimmt, oder sind die Gewichte, oder Maaß, welche ihre Größe angeben, verschieden; so müssen sie gleich gemacht werden.

Wieviel

Wieviel Pfund Kupfer, 1 Pfund 12 Gr. werth, erhält man für 65 Ellen Leinwand, die Elle 4 Gr. gerechnet?

1 Pfund — — 65 Ellen
12 Gr. — — 4 Gr. Fac. $21\frac{2}{3}$ Pfund.

Wieviel Himten Haber, den Himten zu 15 Groschen gerechnet, bekömmt man für 45 Ellen Tuch, die Elle zu 2 Thaler 18 Groschen gerechnet?

1 Himten — — 45 Ellen
15 Gr. — — $2\frac{1}{2}$ Thlr.
1 Thlr. — — 36 Gr. Fac. 270 Himten.

Ich würde meinem Leser zu wenig zutrauen, wenn ich vermuthen wollte, daß er sich diese wenige Regeln nicht völlig bekannt machen sollte; daher wäre es überflüßig, diese Regeln weiter auszuführen.

IV. Abschnitt.

§. 194.

Von den Vorzügen der Kettenregel.

Es wird sich der Vorzug der Kettenregel am besten ins Licht setzen lassen, wenn ich sie mit der Regel Detri vergleiche. Besteht eine Aufgabe aus drey Größen, zu welchen die vierte Proportionalzahl gefunden werden soll; so ist die Kettenregel mit der Regel Detri ganz einerley, man verliert und gewinnet nichts, wenn man sich dieser oder jener Form bedienet.

Besteht aber die Aufgabe aus mehr, als drey Gliedern; so ist der Vorzug der Kettenregel sehr beträchtlich. Ich will die Vergleichung mit einer Aufgabe anstellen, welche mir einfällt. Sie mag diese seyn:

31 Menschen machen in 100 Tagen, wenn sie täglich 4 Stunden arbeiten, 300 Ellen Leinewand, die $1\frac{1}{2}$ Elle breit ist; wieviel Ellen, einer Ellen breite Leinewand machen 60 Menschen, wenn sie täglich 6 Stunden arbeiten, in 50 Tagen?

Die Auflösung dieser Aufgabe nach der Kettenregel erfordert wenig Arbeit. Wie beschwerlich hingegen die Auflösung durch die Regel Detri sey, wird einem jeden in die Augen fallen.

Auflösung durch die Kettenregel.

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ Ellen}\\1\text{ Ell. br.}\end{array}\right\} \text{——} \left\{\begin{array}{l}60\text{ Menschen}\\50\text{ Tage}\\6\text{ Stunden}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}31\text{ Mnsch.}\\100\text{ Tage}\\4\text{ Stund.}\end{array}\right\} \text{——} \left\{\begin{array}{l}300\text{ Ellen}\\1\frac{1}{2}\text{ Elle breit. Fac. }653\frac{7}{31}\text{ Ell.}\end{array}\right.$$

Auflösung durch die Regel de tri:

$$\begin{array}{rcl}31\text{ M.} : 60\text{ M.} &=& 300\text{ Ellen} : \text{Fac. }580\frac{20}{31}\text{ Ellen}\\ 100\text{ T.} : 50\text{ T.} &=& 580\frac{20}{31}\text{ Ell.} : \text{Fac. }290\frac{10}{31}\text{ Ellen}\\ 4\text{ St.} : 6\text{ St.} &=& 290\frac{10}{31}\text{ Ell} : \text{Fac. }435\frac{15}{31}\text{ Ellen}\\ 1\text{ Elle} : 1\frac{1}{2}\text{ Ell.} &=& 435\frac{15}{31}\text{ Ell.} : \text{Fac. }653\frac{7}{31}\text{ Ellen}\end{array}$$

Vergleichung.

1) Die Auflösung dieser Aufgabe durch die Regel Detri erfordert vier Exempel, ehe das gesuchte Facit erfolgt, und sehr oft siehet man sich genöthigt, noch mehrere Exempel, um das endliche Resultat zu erhalten, anzuwenden. Ein einziges Exempel der Kettenregel ist hinreichend, die weitläuftigsten Aufgaben aufzulösen.

2) Eine nur etwas weitläuftige Aufgabe in verschiedenen Exempeln der Regel Detri richtig zu ordnen, erfordert weit mehr Nachsinnen, als das Anordnen desselben Exempels durch die Kettenregel.

3) In

3) In der Regel Detri kann man zwar auch das erste Glied gegen das zweite oder dritte verkleinern. Allein, weil hier nur das Aufheben zwischen ein paar Gliedern statt findet; so wird dieser Vortheil unbeträchtlich. In der Kettenregel hingegen, wo mehrere Glieder gegen einander aufgehoben werden, wird oft das weitläuftigste Exempel durch ein paar Ziffern aufgelöset. Ja, je weitläuftiger das Exempel ist, desto eher finden sich Zahlen, die sich gegen einander verkleinern lassen.

4) In allen Exempeln der Regel Detri, die nicht ganz einfach sind, sieht man sich genöthigt, mehrere Exempel zu bearbeiten. Das Facit des einen Exempels muß ein Glied des folgenden werden. Diese verschiedene Facitte sind noch immer unreine Brüche, welche, wenn sie groß sind, eine Rechnung weitläuftig machen. In der Kettenregel ist nur Ein Facit, und die Brüche im obigen Exempel $580\frac{20}{31}$, $290\frac{10}{31}$, $435\frac{15}{31}$ werden in der Kettenregel gänzlich vermieden. Man erhält nur ein Facit. Daher bekömmt man weiter keine Brüche, als diejenigen, welche in der Aufgabe selbst angegeben sind.

5) In den Exempeln, wo keine Gleichheit unter den Benennungen ist, sind die Vorzüge der Kettenregel ungemein; z. E. 3 Centner hamburger Gewicht kosten 30 Thaler in Golde; wieviel kostet ein Quentgen hannöverisch Gewicht in Cassengelde?

6) Durch die einzige Kettenregel ist man vermögend, alle die Arten von Exempeln aufzulösen, und zwar aufs kürzeste aufzulösen, wozu sonst zehn und mehr Rechnungsarten und Regeln verfertiget werden. Z. E. die Regula Detri, die Regula Conversa, die Regula Quinque, die Zinsrechnung, die Rabatrechnung, u. s. w.

V. Abschnitt.

§. 195.

Von den Fällen, bey welchen die Kettenregel nicht anzuwenden ist.

Da man in der Kettenregel blos mit geometrischen, nicht mit arithmetischen Verhältnissen zu thun hat; so bestehen die Rechnungsarten, welche bey ihr angewandt werden, im Multipliciren und Dividiren. Fasset daher eine Aufgabe solche Bedingungen in sich, welche zum Resultate, oder zu einem Gliede addirt, oder von demselben subtrahirt werden sollen; so können diese Bedingungen nicht in die Kettenregel gebracht werden, sondern man muß sie besonders addiren oder subtrahiren. Z. E. 7 Centner kosten 300 Thaler, die Fracht 9 Thaler, andere Unkosten überhaupt 4 Thaler; wie viel Pfennige kömmt 1 Loth zu stehen? In diesem Falle muß die Fracht und andere Abgaben zu dem Preise der Waare addirt werden. Die Waare kostet daher 313 Thaler. Die Nebenausgaben, welche bey einem Handel angelegt werden, belegt man mit dem Namen der Spesen.

Dinge, die ein Verhältniß gegen einander haben, müssen, im weitläuftigen Verstande genommen, von einer Art seyn. Verschiedene Gewichte, verschiedene Maaßen, lassen sich mit einander vergleichen, daher haben sie ein Verhältniß gegen einander, und diese gleichartigen Dinge sind in der Kettenregel anzubringen.

Hingegen haben ungleichartige Größen z. E. Zeit und Gewicht, Geld und Maaße, kein Verhältniß gegen einander. Man kann nicht sagen: wie sich 2 Pfund zu 4 Thaler verhalten, so verhalten sich 3 Stunden zu 6 Ellen.

Sind daher in einer Aufgabe solche Bedingungen befindlich, die kein Verhältniß zu einander haben; so lassen sich solche nicht in einem einzigen Exempel zusammen ordnen, man muß sie besonders berechnen. Z. E. Wieviel Groschen kömmt 1 Pfund zu stehen, wenn 17 Pfund 30 Groschen kosten, und 13 Pfund 9 Groschen Licent geben. In diesem Falle müßte man besonders berechnen, wieviel der Licent auf 17 Pfund beträgt, und das gefundene zu 30 Groschen addiren, und dann den Preis eines Pfundes durch die Kettenregel finden. Oder man müßte durch die Kettenregel ausrechnen, wie hoch sich der Licent auf ein Pfund beliefe, und das gefundene müßte man zu dem gefundenen Preise eines Pfundes addiren.

So auch muß die Fracht, welche auf gewisse Pfunde bedungen ist, besonders berechnet werden, wenn der Preis von einem Pfunde durch den gegebenen Preis mehrerer Pfunde bestimmt werden soll. Z. E. Wieviel kostet 1 Pfund, wenn 1000 Pfund 60 Thaler gelten, und von 100 Pfund 18 Groschen Fracht bezahlt wird?

Diese Aufgabe läßt sich deswegen nicht in einem einzigen Exempel berechnen, weil 100 Pfund ungleichartig mit 18 Groschen ist, und daher kein Verhältniß zwischen beyden Größen statt findet. Oder, wenn man eine Elle Leinewand für 10 Groschen verkauft, und wird an 64 Ellen 4 Thaler verloren, wie theuer ist 1 Elle eingekauft? Weil die 64 Ellen und das daran verlorne Geld kein Verhältniß zu einander hat, so läßt sich auch diese Aufgabe in Einem Exempel nicht auflösen.

Wäre aber an 64 Thalern 4 Thaler verloren, so hat die Auflösung keine Schwierigkeit, denn zwischen 64 Thaler und 4 Thaler ist ein wahres Verhältniß.

1 Gr. ausgelegt — 1 Elle
1 Elle — — 10 Gr. gehoben
60 gehoben — — 64 ausgelegt. Fac. $10\frac{2}{3}$ Gr.

Außer dem aber, daß die Dinge, welche mit in die Kettenregel gebracht werden sollen, gleichartig seyn müssen, wird auch erfordert, daß die Spesen mit dem Hauptgelde proportional seyn müssen. Das ist, wie sich das Hauptgeld ändert, so müssen sich auch die Spesen ändern. Wenn von jedem 100 oder von jedem 1000 des Hauptgeldes 1, $\frac{1}{2}$, 2 Thaler für Spesen bedungen sind, so sind diese Spesen mit dem Hauptgelde proportional, und daher in die Kettenregel anzubringen. Denn giebt 100 Cap. 2 Thaler, so geben 200 Cap. 4 Thaler Spesen. Z. E. Man kauft 8000 Pfund Kaffee, giebt für 10 Pfund 4 Thaler, und auf jede 100 Thaler werden 2 Thaler Spesen gegeben. Wie hoch kömmt die Waare?

1 Thlr. mit Spes. 8000 Pfund
10 Pfund — 4 Thlr. ohne Spesen
100 ohne Spesen — 102 mit Spesen. Fac. 3264 Thl.

Wird hingegen überhaupt etwas für die Spesen bedungen, so ist dieses nicht mit in die Kettenregel zu bringen, sondern es wird zum Facitte addirt. Denn ein größeres Hauptgeld würde nicht mehr Spesen geben.

Wenn eine Aufgabe aus drey gegebenen Größen besteht; so ist das Facit die vierte geometrische Proportionalzahl zu den drey Größen. Hat eine Aufgabe mehr als drey gegebene Größen, so besteht das Exempel aus einem Haupt- oder Proportionalsatze, welchen das vierte Glied fehlet, und aus so vielen Verhältnissen, als Reihen außer dem Hauptsatze da sind. Dis mußte hier noch einmal wiederholt werden.

§. 196.

§. 196.

Eine jede Aufgabe, auch die weitläuftigste, welche durch Ein Exempel aufgelöset werden kann, muß nur Einen Proportionalsatz, nicht mehrere haben. Die übrigen Reihen müssen blos Verhältnisse seyn. Ich rede hier nicht von den Exempeln, welche die Regel der Gesellschaft ausmachen, in welchen man mehr als 1 Facit haben will, folglich die Kettenregel mehr als einmal angewandt werden muß, sondern von solchen Exempeln, welche nur Ein Facit fordern.

Fasset daher eine Aufgabe mehr als einen Proportionalsatz in sich, so ist das geforderte Resultat durch Ein Exempel nicht zu finden; sondern die Kettenregel muß so oft angewandt werden, als Proportionalsätze in der Aufgabe liegen; z. E.

3 Pferde verzehren in 5 Tagen 4 Himten Frucht; 7 Ochsen in 3 Tagen 5 Himten; wieviel Himten verzehren 9 Pferde und 3 Ochsen in 60 Tagen?

Weil in dieser Aufgabe zween Proportionalsätze liegen, so muß die Kettenregel zweymal angewandt und die beyden gefundenen Resultate addirt werden.

1 Himt. — { 9 Pferde / 60 Tagen 1 Himt. — { 3 Ochsen / 60 Tagen.

3 Pf. / 5 Tag. } — 4 Himt. Fac. 144 H. 7 Ochs. / 3 Tag. } — 5 Himten. Fac. $42\frac{6}{7}$ Himtne.

Die Summe der Facitte ist $186\frac{6}{7}$ Himten, als das Facit der Aufgabe. Die beyden Proportionalsätze der Aufgaben sind.

3 Pf. : 9 Pf. = 4 Himt. : Himt. 7 Ochs. : 3 Ochs. = 5 H. : H.

Außer diesen Proportionen fasset die Aufgabe noch zwey Verhältnisse in sich, nämlich 5 Tage zu 60 Tagen, und 3 Tage zu 60 Tagen.

Noch ein Exempel. Wieviel Bogen schreiben 2 Schreiber in 13 Stunden, wenn einer in 1 Stunde 1 Bogen, der andere in 2 Stunden 3 Bogen schreibt? Weil in dieser Aufgabe zween Proportionalsätze liegen; so muß die Kettenregel 2 mal angewandt werden.

VI. Abschnitt.

§. 197.

Von den Vortheilen bey der Kettenregel.

Einer der wichtigsten Vorzüge der Kettenregel vor andern Rechnungsarten besteht darinn, daß man, besonders in weitläuftigen Aufgaben, sehr oft die Glieder verschiedener Columnen, durch eine gleiche Division gegen einander verkleinern kann. Wodurch oft alle Glieder beyder Columnen, deren Produkte Millionen ausmachen würden, gänzlich verschwinden.

§. 198.

Oft genung aber sind die Glieder der Columnen von der Art, daß sie sich nicht ohne Rest dividiren lassen, oder daß ihr Divisor kein Glied der andern Columne ohne Rest dividirt. Sind in diesem Falle die Glieder groß, oder sind der Glieder viel; so erwachsen durch ihre Multiplication große Zahlen, deren Bearbeitung beschwerlich wird; und ein Irrthum im Rechnen ist um desto mehr zu befürchten, je weitläuftiger die Arbeit wird. Z. E. Wieviel Thaler kosten 3772 Mann 7 Tage zu erhalten; wenn 8869 Mann in 31 Tagen 274941 Thaler kosten?

1 Thlr. — { 3772 Mann. 7 Tagen.

{ 8869 Mann 31 Tage } — 274941 Thlr.

Weil

Weil die Glieder dieses Exempels durch eine gleiche Division sich nicht verkleinern lassen, so würde eine weitläuftige Multiplication und Division, um das Facit zu erhalten, nothwendig seyn, wenn es mir nicht gelungen wäre, ein Mittel zu finden, ohne Division die unangenehme Größe der Glieder durch eine geringe Arbeit oft beträchtlich zu vermindern. Das Facit des oben gewählten Exempels läßt sich durch dieses Mittel, wie die Folge zeigen wird, ohne alles Dividiren blos durch eine nicht große Multiplication finden.

Das Verfahren selbst will ich erst in einfachen Aufgaben von dreyen Gliedern, nachher in mehrern zusammen gesetzten Aufgaben zeigen.

Man subtrahire das Glied der Theilcolumne, von einem Gliede der zwoten Columne, von welchen der Abzug geschehen kann, und behalte statt der Zahl, welche den Abzug erlitten, nur den Rest; man verfahre weiter, wie man immer verfährt. Zum gefundenen Facitte addire man dasjenige Glied, welches keinen Abzug erlitten. Die Summe ist das wahre Facit. Z. E.

Zu 2564 Ellen Leinewand gebraucht man 2612 Stück Garn; wieviel Stück gebraucht man zu 43 Ellen?

1 Stück — — 43 Ellen.
2564 Ellen — — 2612 Stück. Fac. $43\frac{2064}{2564}$.

Von 2612 subt. 2564, bleibt Rest 48, 48 mal 43 ist 2064. Dis Produkt durch 2564 dividirt, giebt den Quotienten $\frac{2064}{2564}$, hierzu 43 addirt, giebt Fac. $43\frac{2064}{2564}$.

§. 199.

Der Fall, daß die Division durch die Theilcol. nur darinn besteht, daß man den Divisor und Dividendus bruchweise schreibt, erfolgt so oft, als die Zahl der

Theilcol. größer, als das Produkt aus der zweyten Columne ist.

§. 200.

Es findet aber nebst der Subtraction auch das Verkleinern statt. In dem jetzt gewählten Exempel lassen sich die Glieder 2564 und 2612 durch 4 ohne Rest dividiren. Dis hätte man thun und nach verrichteter Verkleinerung die Subtraction vornehmen können.

Man hätte auch erst die Subtraction verrichten, und alsdenn den Rest 48 gegen 2564 durch 4 verkleinern können, so wäre in der Theilcol. 641 und statt 48, 12 gekommen. In allen Fällen aber erfolgt dasselbe Resultat.

Wenn man nur die gegebenen Zahlen eines Exempels ansieht, so sieht man leicht, ob es in dem gegebenen Falle vortheilhafter sey, vor oder nach der Verkleinerung zu subtrahiren. Folgendes Exempel wird zeigen, daß es oft einen beträchtlichen Unterschied in Ansehung der Arbeit gebe, wenn man vor oder nach der Verkleinerung subtrahirt.

§. 201.

Zuvor aber muß ich erinnern, daß es, um einer Verwirrung zu vermeiden, nothwendig sey, gleich bey der Subtraction, nicht früher und nicht später, diejenige Zahl, welche zum Facitte addirt werden soll, zur Seite zu schreiben, und sie mit einem Kreuze, als mit dem Zeichen der Addition, zu bezeichnen. Denn in dem Stande, in welchen die Zahl war, welche addirt werden soll, als die Subtraction geschah, muß sie zu dem gefundenen Facitte addirt werden. Nimmt man dieses in acht, so kann man, ohne einen Irrthum befürchten zu dürfen, die Verkleinerung vor oder nach der Subtraction, und mit welchen Gliedern man kann, vornehmen.

Wieviel

Wieviel Thaler kosten 174 Pfund; wenn 7892 Pfund 7901 Thaler kosten?

1 Thlr. — — 174 Pfund
7892 Pfund — — 7901 Thlr.

Man kann hier, vor der Subtraction, 7892 und 174 durch 2 dividiren, seinen Vortheil aber würde man schlecht kennen, wenn man es thäte. Denn je kleiner die Zahl ist, welche subtrahirt wird, um desto grösser bleibt der Rest. Subtrahirt man aber sogleich die Zahl der Theilcol. von 7901; so bleibt der Rest nur 9. Nun bemerke man die Zahl 174 mit dem Zeichen der Addition, verkleinere die Zahlen gegen einander, so sieht der Satz so aus:

1 Thlr. — — 87
3946 — — 9 + 174

9 mal 87 ist 783, dis Produkt durch 3946 dividirt, giebt $\frac{783}{3946}$. Hierzu 174 addirt: giebt Facit $174\frac{783}{3946}$.

Hätte man sich des beträchtlichen Vortheils der Subtraction nicht bedienet, so würde, um das Resultat zu erhalten, welches jetzt mit so weniger Mühe gefunden ist, dieses kleine Exempel schon eine weitläuftige Multiplication und Division gefordert haben.

Wieviel Thaler Gold sind 3753 Thaler Cassengeld?

1 Thl. G. — 3753 Thl. C. 1 Thl. G. — 3753
14 C. — 15 Gold 14 — 1 + 3753

Der erste Satz zeigt das Exempel in seiner unveränderten, der zweyte in seiner durch die Subtraction veränderten Gestalt. Man darf nur 3753 durch 14 dividiren, und zum Quotienten 3753 addiren, um das Facit $4021\frac{1}{14}$ zu erhalten. Der ganzen Multiplication durch 15 ist man durch den angewandten Vortheil überhoben, und die Division ist ebenfalls kleiner.

§. 202.

Der Vortheil einer verkürzten Rechnungsart besteht nicht allein darinn, daß man Zeit und Mühe erspart; sondern vornehmlich darinn, daß man sicherer arbeitet. Denn in einer weitläuftigern Rechnung schleicht sich leichter ein Fehler, als in einer kürzern ein.

Ist das Glied der Theilcolumne, welches subtrahirt werden soll, in Vergleichung desjenigen Gliedes, von welchen der Abzug geschieht, zu klein; so ist der Vortheil nicht beträchtlich. Man kann aber diesen Vortheil dadurch beträchtlicher machen, daß man das Glied der Theilcol. welches subtrahirt werden soll, durch eine solche Zahl multiplicirt, die ein Produkt giebt, welches der Zahl, die Abzug leiden soll, nahe kömmt; und mit demselben Multiplicator auch die Zahl multipliciret, welche zum Facitte addirt werden soll.

Man giebt für 3256 Bogen abzuschreiben 317 Thaler; wieviel Thaler werden 9778 Bogen abzuschreiben kosten?

1 Thlr.	— —	9778 Bogen	
3256 Bogen	— —	317 Thlr.	

Zöge man 3256 von 9778 ab, so würde noch ein Rest von vier Ziffern überbleiben, und der Vortheil wäre also nichts. Man multiplicire daher in diesem Falle sowol die Zahl der Theilcol, als auch die Zahl, welche am Ende addirt werden soll, durch 3, das Prod. 9768 ziehe man von 9778 ab, den Rest 10 behalte man statt 9778, und verfahre weiter wie man immer bey der Kettenregel verfährt. Nun hat das Exempel diese Gestalt;

1 Thlr.	— —	10		
3256	— —	317	+ 951	Fac. $951\frac{3170}{3258}$.

§. 203.

Es ist kaum nöthig zu erinnern, daß es eine unnöthige Weitläuftigkeit seyn würde, wenn man, wie hier um der Deutlichkeit willen geschehen mußte, eine jede Veränderung durch einen besondern Satz ausdrücken wollte. Man streiche die Zahlen, welche nicht gelten sollen, aus, und schreibe die geltenden ihnen zur Seite.

Die Natur des angezeigten Vortheils fordert es, daß immer die Theilcol. von der andern subtrahirt werde; sie verstattet nicht, daß die Subtraction der andern Columne von der Theilcolumne geschehe. Es wäre daher der erwehnte Vortheil alsdann nicht anzuwenden, wenn das Glied der Theilcolumne größer, als ein Glied der andern Columne wäre, weil es sich nicht subtrahiren ließe.

Um aber doch auch in diesem Falle die Subtraction anzuwenden, dividire man das zu große Glied der Theilcolumne, wie es die Umstände fordern, durch 2, 3, oder 4, und subtrahire den Quotienten, von einem Gliede der andern Columne. In diesem Falle aber, muß auch das Glied der andern Columne, welches keinen Abzug erlitten, durch 2, 3, oder 4 dividirt werden, und nur der Quotient, wird zum gefundenen Facitte addirt. Es muß aber der Divisor in beyden Gliedern aufgehen, denn die Bearbeitung eines überbliebenen Bruchs würde den Vortheil wieder vernichten.

Wieviel Thlr. kosten 4889 Ellen; wenn 9756 Ellen 654 Thlr. kosten?

Weil sich 9756 von keinem Gliede der zwoten Columne abziehen läßt, so halbire man die erste Zahl, und ziehe die Hälfte von 4889 ab. Den Rest 11 setze man statt der Zahl 4889 hin. Man halbire auch die Zahl 654. und setze die Hälfte 327 mit dem Additionszeichen zur Seite. Nun löse man das Exempel, wie gewöhnlich, auf, und addire zum Facitte 327.

In der Bearbeitung behält man blos die Hauptzahlen, welche die Aufgabe enthält, nicht die durch Multiplication und Division veränderten Zahlen, die veränderte Zahl der Theilcolumne ist nur da, um abgezogen, die veränderte Zahl der andern Columne, um addirt zu werden.

Nachdem die Hälfte von 9756 von 4889 abgezogen ist, steht das Exempel wie folget.

1 Thlr.	—	—	11
9656	—	—	655 + 327 Fac. $327\frac{35}{48}\frac{27}{78}$ Th.

Der Satz eines andern Exempels mag seyn:

1	—	—	12
28	—	—	17

Die 28 durch 2 dividirt giebt 14, die 14 von 17 subtrahirt ist Rest 3, die 12 ebenfalls durch 2 dividirt giebt 6, welche mit dem Additionszeichen zur Seite geschrieben werden. Nun steht das Exempel.

1	—	—	12
28	—	—	3 + 6

3 mal 12 ist 36, dividirt durch 28 ist $1\frac{8}{28}$ hierzu addirt 6, ist Facit $7\frac{2}{7}$.

§. 204.

Besteht ein Exempel aus mehr als drey Zahlen, welche sich nicht verkleinern, oder nicht genug verkleinern lassen; so subtrahire man das Produkt der Theilcolumne von einem Gliede, oder von dem Produkte verschiedener Glieder der zwoten Columne, und addire das noch übrige Glied, oder das Produkt der noch übrigen Glieder zum gefundenen Facitte, die Summe ist das gesuchte Resultat.

Man

Man kann die Glieder der beyden Columnen vor oder nach der Subtraction gegen einander verkleinern; nur muß die Zahl, welche am Ende der Rechnung addirt wird, unverändert bleiben.

Immer muß das Produkt aller Glieder der Theilcolumne subtrahirt werden. Ist dis Produkt zu klein um einen Vortheil durch die Subtraction zu verschaffen, oder zu groß, um abgezogen werden zu können; so multiplicire man es im ersten Falle, im andern dividire man es mit einer bequemen Zahl. Mit derselben Zahl multiplicire oder dividire man auch das Produkt derjenigen Zahlen der andern Columne, deren Produkt keinen Abzug erlitten, was hier kömmt addire man zum Facitte.

Da diese Produkte oder Quotienten blos darum gemacht werden, um die Subtraction möglich oder beträchtlich zu machen, und um die Größe des Postens der zuletzt addirt werden soll, zu bestimmen; so können sie, wenn sie das ihrige gethan haben, als unnütz weggestrichen werden.

Wieviel Thaler Zinse bringen 1476 Thlr. in 5 Monaten, wenn 110 Thlr. in 13 Monaten 7 Thlr. Zinse bringen?

1 Thlr. Zinse — —	{	1476 Thlr. 5 Monate
110 Thlr. 13 Monate }	— —	7 Thlr. Zinse
1430		

Wollte ich gleich anfangs 110 gegen 5 verkleinern, so würde das Produkt der Theilcolumne um einen beträchtlichen Vortheil zu verschaffen zu klein werden. Ich subtrahire also das Produkt der Theilcolumne 1430 von 1476, der Rest ist 46, nunmehro schreibe ich 35 als das Produkt von 5 mal 7 mit einem Kreuze zur

Seite. Dis Produkt welches zum Facitte addirt werden muß, ist unveränderlich. Die Glieder des Exempels werden gehörig gegen einander verkleinert, und das Exempel sieht nun so aus:

T II	23
13	7 Fac. $1\frac{18}{143}$ und 35 ist $36\frac{18}{143}$ Zinse.
143	161

Es mag ein Exempel aus folgenden Größen bestehen.

T 5	—	—	33
I	—	—	17
I	—	—	3
			4

Wollte man 5 von einem Gliede der andern Columne subtrahiren, so wäre der Vortheil nichts. Um aber die Subtraction mit Vortheil anwenden zu können, könnte man 5 durch 2 multipliciren, das Produkt 10 von 3 mal 4, das ist von 12 abziehen, oder man könnte 5 durch 3 multipliciren, das Produkt 15 von 17 abziehen, oder man könnte 5 durch 10 multipliciren, und das Produkt 50 von 3 mal 17 nämlich 51 abziehen. Wir wollen das letzte wählen. Nun multiplicire man aber auch das Produkt der Factoren 33 und 4 durch 10. Dieses Produkt 1320 ist die unveränderliche Zahl welche zum Facitte addirt wird.

T	—	—	33		
5	—	—	4	+ 1320	Fac. $1346\frac{2}{7}$

Ein Exempel bestehe aus den Zahlen.

	T	—	— 9
	14	—	— 372
	7	—	— 6
	98		

Das

Das Produkt der Theilcolumne ist zu groß gegen 6 mal 9, und zu klein gegen 372, man dividire also 98 durch 2, und ziehe den Quotienten 49 von 6 mal 9 ab, bleibt Rest 5. Man dividire auch 372 durch 2, setze den Quotienten 186 um ihn zum Facitte zu addiren zur Seite, nun hat man statt 9 und 6 den Factoren 5. Weiter verfahre man wie man immer verfährt, so erhält man zum Facitte $204\frac{48}{49}$.

Sind Brüche in der Aufgabe befindlich, so bringe man die Nenner wie gewöhnlich in die gegenseitige Columne, und wende nach Beschaffenheit der Zahlen, die Subtraction an.

§. 205.

Um das ganze Verfahren besser übersehen zu können, will ich das was zerstreut gesagt ist, hier kurz zusammen fassen.

1) Das Glied der Theilcolumne von einem Gliede der zwoten Columne subtrahirt, und den Rest behalten, das andere Glied der zwoten Columne zum gefundenen Facitte addirt, giebt das rechte Facit.

2) Besteht das Exempel aus mehr als dreyen Gliedern, so wird das Produkt aller Glieder der Theilcolumne von dem Produkte etlicher Glieder, oder von einem Gliede der zwoten Columne abgezogen, und das Produkt der übrigen Glieder dieser Columne zum ersten Facitte addirt.

3) Ist das Glied der Theilcolumne zu klein, oder zu groß, so multiplicire oder dividire man es, und verrichte nun den Abzug. Es werden aber auch in diesem Falle die übrigen Glieder der zwoten Columne mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt, und das Produkt oder der Quotient wird zuletzt addirt. Diese veränderten Zahlen beyder Columnen werden wieder weggestrichen, weil sie nur gemacht sind, die Subtraction möglich oder beträchtlicher zu machen.

4) Man

4) Man kann alle Glieder beyder Columnen vor oder nach der Subtraction wie gewöhnlich gegen einander verkleinern, nur wenn die Subtraction geschieht so muß auch der Posten bestimmt werden, welcher zuletzt addirt werden soll.

Es ist der Vortheil der Subtraction vornehmlich bey solchen Exempeln anzuwenden, deren Glieder aus großen Zahlen bestehen, die beschwerlich zu multipliciren und zu dividiren sind. In kleinen Exempeln ist das Verkleinern der Glieder der beste Vortheil.

§. 206.

Wenn eine Aufgabe unreine Brüche enthält, welche von der Art sind, daß sowol die ganze Zahl, als auch der Zehler des daran hängenden Bruchs, mit einer Zahl der andern Columne einen gemeinschaftlichen Divisor hat; so kann die Division an beyden Theilen, ohne Nachtheil des Resultats geschehen.

Denn der Bruch ist mit der ganzen Zahl durch die Addition verbunden, beyde Theile zusammen genommen, machen nur eine Größe aus. Wenn aber eine Größe, die aus Theilen besteht, multiplicirt oder dividirt werden soll; so muß es an allen Theilen geschehen (§. 105.) Es wird aber ein Bruch multiplicirt oder dividirt, wenn man die Arbeit blos am Zehler verrichtet.

Zur Bekleidung einer Wand, gebraucht man $20\frac{5}{6}$ Ellen $\frac{3}{4}$ breites Zeug; wieviel Ellen $\frac{2}{3}$ breites Zeug, gebraucht man dazu?

1 Ellen	—	—	$20\frac{5}{6}$
$\frac{3}{4}$ breit	—	—	$\frac{2}{3}$ breit.

Weil sich sowol die ganze Zahl 20, als auch der Zehler 5, durch die 5 der Theilcolumne dividiren läßt;

so

so verwandelt man die 5 der Theilcolumne in 1, und statt 20 $\frac{5}{6}$ b. kömmt man 4 $\frac{1}{6}$.

Eine Größe die aus benannten Zahlen, z. E. aus Thalern, Groschen und Pfennigen besteht, kann alsdenn gegen eine Zahl der andern Columne verkleinert werden, wenn alle Theile der benamten Zahl theilbar sind, sonst nicht.

Neuntes Kapitel.

Exempel der Kettenregel zur Uebung.

I. Abschnitt.

Vermischte Exempel.

§. 207.

In den gewählten Exempeln, werde ich nur blos den Satz ausdrücken, ohne die Nenner in die gegenseitige Columne zu werfen, und ohne die Zahlen verschiedener Columnen, gegen einander durch eine gleiche Division zu verkleinern.

1) Ein Ries Papier kostet 3 Thaler 12 Gr. wieviel Pfennige kostet 1 Bogen? 1 Ries hat 20 Buch, 1 Buch 24 Bogen.

1 Thlr.	—	—	1 Bogen
1 Ries	—	—	3 $\frac{1}{3}$ Thlr.
1 Thlr.	—	—	36 Gr.
1 Gr.	—	—	8 Pf.
20 Buch	—	—	1 Ries
24 Bogen	—	—	1 Buch. Fac. 1 Pf.

Probe der Kettenregel.

Man läßt das ganze Exempel mit allen Zahlen unverändert stehen. In der obersten Reihe linker Hand,

wo

wo T ist, schreibe man das gefundene Facit. Nun bemerke man ein Glied, welches man will, und in welcher Columne man will, mit dem Zeichen der Theilcolumne, nämlich T. Das Facit des nunmehro berechneten Exempels muß, wenn man richtig gerechnet hat, das mit T bezeichnete Glied seyn. Dieses mit T bezeichnete Glied berechnet man nicht mit, und die Columne, in welcher dis Glied steht, ist die Theilcolumne.

Ob das Facit des vorigen Exempels richtig sey, wird die Probe zeigen. Die Zahl 36 sey das bezeichnete Glied. Das Facit muß daher in folgender Probe 36 werden. Wenn 2 Pfennige das richtige Facit des vorigen Exempels ist.

2 Pfennige	—	—	1 Bogen
1 Ries	—	—	$3\frac{1}{3}$ Thlr.
1 Thlr.	—	—	36 Gr. T
1 Gr.	—	—	8 Pfennige
20 Buch	—	—	1 Ries
24 Bogen	—	—	1 Buch. Fac. 36.

2) Der 4te Theil von dem Gelde, welches zur Erbauung einer Brücke angelegt ist, beträgt 21000 Thaler. Der König giebt 60000 Thaler zu diesem Baue her, den wievielsten Theil hat der König hergegeben?

T Theil	—	—	60000 Thlr.
21000 Thlr.	—	—	$\frac{1}{4}$. Fac. $\frac{5}{7}$.

3) $\frac{3}{4}$ Loth kosten 1 Thaler 9 Groschen; wieviel Loth bekömmt man für 1 Thaler 18 Groschen?

T Loth	—	—	$1\frac{1}{2}$ Thlr.
$1\frac{1}{4}$ Thlr.	—	—	$\frac{3}{4}$ Loth. Fac. $\frac{9}{10}$ Lot.

§. 208.

Warum müssen die Nenner der Brüche immer in die gegenseitige Columne geworfen werden? Ein jeder

Nenner

Nenner dividirt seinen Zehler, mithin die ganze Columne in welcher sich der Bruch befindet. Das Versetzen des Nenners ist nichts anders, als eine gleiche Multiplication beyder Columnen, und diese darf ohne Nachtheil des Resultats verrichtet werden. Man multiplicirt nämlich diejenige Columne, in welcher sich der Bruch befindet, dadurch mit dem Nenner, daß man diesen Nenner wegstreicht; denn man nimmt der Columne diejenige Zahl, durch welche sie dividirt werden sollte, das ist man multiplicirt sie damit. Nun aber muß auch die gegenseitige Columne durch denselben Nenner multiplicirt werden, deshalb setzt man solchen zur wirklichen Multiplication, in diese gegenseitige Columne.

4) Wieviel Stunden sind $\frac{15}{16}$ Monat?

1 Stund.	—	—	$\frac{15}{16}$ Monat	
1 Monnt	—	—	30 Tage	
1 Tag	—	—	24 Stund.	Fac. 675 Stund.

5) Ein Quentgen kostet $\frac{27}{40}$ Pfennig; wieviel Centner hat man für 90 Thlr. erhalten?

1 Cent.	—	90 Thlr.	
$\frac{27}{40}$ Pf.	—	1 Quentg.	
4 Qu.	—	1 Loth	
32 Loth	—	1 Pfund	
100 Pf.	—	1 Centn.	
1 Thlr.	—	36 Gr.	
1 Gr.	—	8 Pfen.	Fac. 3 Centn.

6) $\frac{7}{8}$ Ellen kosten $\frac{3}{4}$ Thlr. Cassengeld; wieviel Thlr. kosten 80 Ellen in Golde?

1 Thlr. Gold	—	—	80 Ellen
$\frac{7}{8}$ Ellen	—	—	$\frac{3}{4}$ Thlr. Cassg.
14 Cassg.	—	—	15 Gold. Fac. $73\frac{23}{49}$ Th. G

7) Man giebt für 219 Thlr. Gold, 200 Thlr. Gulden; wieviel Agio haben 100 Thlr. gegeben?

1 Thlr. Gold — 100 Thl. Guld.
200 Thlr. Guld. — 219 Thlr. Gold Fac. $109\frac{1}{2}$ Th. G.

Da man für 100 Thlr. Gulden $109\frac{1}{2}$ Thlr. Gold erhalten, so ist die Agio auf 100 Thlr. $9\frac{1}{2}$ Thlr.

Soll die vierte Proportionalzahl, oder das Facit. das Capital sammt dem Agio enthalten, so muß auch das dritte Glied beydes in sich fassen. Soll es das Agio allein enthalten, so muß auch das dritte Glied aus dem Agio allein bestehen.

8) Für $764\frac{1}{2}$ Thlr. in Ducaten, bekömmt man 812 Thlr. in Louisd'or; wieviel Agio haben 100 Thlr. gethan?

1 Thlr. Agio — — 100 Thlr.
$764\frac{1}{2}$ Thlr. — — $47\frac{1}{2}$ Thlr. Agio. Fac. $6\frac{326}{1529}$ Th.

9) Wieviel Thlr. Gold bekömmt man für 5000 Thlr. Gulden; wenn man auf einem Gulden 6 Pfen. oder $\frac{3}{4}$ Gr. bekömmt?

1 Thlr. Gold — — 5000 Thlr. Gulden
24 in Gulden — — $24\frac{3}{4}$ Gold Fac 5156$\frac{1}{4}$ Thlr.

10) Wieviel Thlr. ist das Agio auf 5000 Thlr. Gulden; wenn 24 Gr. $\frac{3}{4}$ Gr. Agio geben?

1 Thlr. Agio — — 5000 Thlr. Guld.
24 Gr. — — $\frac{3}{4}$ Agio Fac. 156$\frac{1}{4}$ Thlr.

11) Eine Person kauft 64 Ellen Leinwant, für 28 Thlr. sie verkauft 1 Elle wieder für 15 Gr. gewinnet oder verliert sie?

Wenn man die Richtigkeit einer schon berechneten Aufgabe untersuchen will, so nimmt man das Facit als unbekannt an, und berechnet das Exempel noch einmal, oder man nimmt das Facit als richtig, und ein beliebiges Glied des Exempels, als unbekannt an, und findet dieses Glied noch einmal. Trift das gesuchte Glied mit dem gegebenen überein; so ist das erste Facit richtig. In dem gegebenen Exempel will man untersuchen, ob die Person sich zum Schaden oder Vortheil gerechnet habe. Man sehe daher ein beliebiges Glied als unbekannt an, und berechne es. So verfährt man immer, wenn ein Exempel von der Art ist, daß die Richtigkeit der Auflösung untersucht werden soll.

1 Thlr. — — 64 Ellen	1 Ellen — — 28 Thl.
1 Elle — — 15 Gr.	15 Gr. — — 1 Elle
36 Gr. — — 1 Thlr.	1 Thlr. — — 36 Gr.
Fac. $26\frac{2}{3}$ Thlr.	Facit $67\frac{1}{2}$ Ellen

1 Gr. — — 1 Elle
64 Ellen — — 28 Thlr.
1 Thlr. — — 36 Gr.

Facit $15\frac{3}{4}$ Gr.

Die drey gefundenen Facitte ergeben, daß sie an 64 Ellen $1\frac{1}{3}$ Thlr. an einer Elle 6 Pf. verliere.

12) Ein Tapezierer bringt zur Bekleidung einer Wand, die 45 Ellen lang, und 20 Ellen breit ist $309\frac{1}{2}$ Elle Zeug, das 3 Ellen breit ist, in die Rechnung; hat er sich oder dem Bauherrn zu nahe getreten?

1 Ellen
3 Ellen breit } — — { 45 Ellen lang
20 Ellen breit

Facit 300 Ellen

13) Wieviel Pfennig sind 10 Thlr.?

1 Pfen. — — 10 Thlr.
1 Thlr. — — 36 Gr.
1 Gr. — — 8 Pfen. Fak. 2880 Pfen.

14) Man soll von einer Sorte Wein, eine Bouteille für 8 Gr. Cassengeld, oder den Anker für 9 Thlr. Gold erhalten, bey welchem Kaufe hat man Vortheil?

1 Thlr. Gold — — 1 Ank.
1 Bouteille — — 8 Gr. Cassg.
1 Anker — — 40 Bout.
36 Gr. — — 1 Thlr.
14 Cassg. — — 15 Gold Fac. $9\frac{11}{21}$ Thlr.

man hat also wenn man den Wein Ankerweise nimmt $\frac{11}{21}$ Thlr. auf einen Anker Profit.

15) Wieviel Gr. sind $\frac{11}{21}$ Thlr.?

1 Gr. — — $\frac{11}{21}$ Thlr.
1 Thlr. — — 36 Gr. Fac. $18\frac{18}{21}$ Gr.

16) Ein hamburger Kaufmann bietet eine Sorte Zucker, 10 Pfund für 3 Mark 12 Schilling, oder oder $34\frac{2}{3}$ Pfund für einen Louisdor an; wieviel Mark machen 1 Louisd'or aus?

1 Mark — — 1 Ldor
10 Pfund — — $3\frac{3}{4}$ Mark
1 Ldor — — $34\frac{2}{3}$ Pfund. Fac. 13 Mark.

17) 7 Brabanter Ellen mögen 8 hannöverische, und 9 Thlr. Gulden, 10 Thlr. Gold seyn. Nun kosten 90 Brabanter Ellen 50 Thlr. in Gulden; wieviel Gr. kömmt eine hannöverische Elle in Golde?

1 Thlr.

1 Thlr. Gold — — 1 hanöv. Elle
90 brab. Ellen — — 50 Thlr. Guld.
9 Guld. — — 10 Gold
8 han. Ellen — — 7 brab. Ellen
1 Thlr. — — 36 Gr. Fac. $19\frac{4}{9}$ Gr. Gold

18) Wieviel brabanter Ellen sind 8 hanöversche Ellen, da 90 brabanter Ellen 50 Thlr. Gulden, und eine hanöversche Elle $19\frac{4}{9}$ Gr. Gold kostet, und 9 Thl. Gulden 10 Thlr. Gold sind?

1 Brab. Ellen — — 8 hanöv. Ellen
50 Thlr. Guld. — — 90 brab. Ellen
1 hanöv. Elle — — $19\frac{4}{9}$ Gr. Gold
10 Gold — — 9 Gulden
36 Gr. — — 1 Thlr. Fac. 7 brab. Ellen

19) 200 Thlr. geben in $1\frac{1}{2}$ Jahre 16 Thlr. Zinse; wieviel Zinse geben 150 Thlr. in 8 Monaten?

1 Thlr. Zinse — — { 150 Thlr. / 8 Monate
200 Thlr. / $1\frac{1}{2}$ Jahr } — — 16 Thlr.
12 Monate — — 1 Jahr Fac. $5\frac{1}{3}$ Thlr.

20) Die jährliche Einnahme eines Mannes ist $214\frac{2}{3}$ Thlr. in Gulden; wieviel ist die tägliche Einnahme in Golde?

1 Thlr. Gold — — 1 Tage
1 Jahr — — $214\frac{2}{3}$ Thlr. Guld.
9 Guld. — — 10 Gold
1 Thlr. — — 36 Gr.
365 Tage — — 1 Jahr Fac. $23\frac{115}{219}$ Gr. Gold

21) Wieviel Stunden sind $\frac{2}{17}$ Wochen?

1 Stunden — — $\frac{2}{17}$ Wochen
1 Woche — — 7 Tage
1 Tag — — 24 Stund. Fac. $19\frac{13}{17}$ Stunden.

22) Ein Regiment Soldaten bestehet aus 800 Mann, ein Mann bekömmt täglich 1 Gr. 6 Pf. Cassengeld; wieviel Thlr. in Golde kostet das Regiment in einem Jahre?

1 Thlr Gold — — { 800 Mann / 1 Jahr
1 Mann, 1 Tage } — — $1\frac{3}{4}$ Gr. Cassg.
36 Gr. — — 1 Thlr.
14 Cassg. — — 15 Gold
1 Jahr — — 365 Tag. F. $1520\frac{1}{3}$ Thl. G.

23) Man kauft einen Ochsen der 620 Pfund wiegt, für 7 Louisd'or; wie hoch kömmt 1 Pfund in Cassengelde?

1 Gr. Cassg. — — 1 Pfund
620 Pfund — — 7 Louisd'r
1 Ld'r — — 5 Thlr.
1 Thlr. — — 36 Gr.
15 Gold — — 14 Essg. Fac. $1\frac{239}{1575}$ Gr. Essg.

24) 24 Mädgen spinnen in 4 Wochen 200 Stück Garn; wieviel Stück spinnen 8 Mädgen in 6 Wochen?

1 Stück — — { 8 Mädgen / 6 Wochen
24 Mädg., 4 Woch. } — 200 Stück Fac. 100 Stück

25) Man finde zu dem Nenner 42 einen solchen Zehler, daß der Bruch, dem Bruche $\frac{3}{7}$ gleich sey.

1 Zehler — — 42 Nenner
7 Nenner = 3 Zehler Fac. 18

26) Man

26) Man finde zu dem Zehler 39 einen solchen Nenner, daß der Bruch dem Bruche $\frac{3}{4}$ gleich sey.

1 Nenner — — 39 Zehler
3 Zehler — — 4 Nenner Fac. 52

Wenn der gefundene Nenner ein unreiner Bruch wäre, so wäre dies ein Beweis, daß der Zehler des Bruchs $\frac{3}{4}$ nie 39 seyn könnte.

27) Sind sich die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{26}{39}$, $\frac{10}{16}$ gleich? Man sehe nach Belieben den Nenner oder den Zehler, eines der beyden Brüche, welche man untersuchen will, als unbekannt an, und suche das unbekannte Glied noch einmal.

1 Zehler — — 39 Nenner
3 Nen. — — 2 Zehler. Fac. 26

1 Nenner — — 10 Zehler
2 Zehler — — 3 Nenner Fac. 15

Die beyden ersten Brüche sind sich gleich, der letzte müßte $\frac{10}{15}$ seyn, wenn er mit den übrigen gleich wäre.

28) Wenn der Himten Rocken 1 Thlr. gilt, so wiegt ein 6 Gr. Brodt 12 Pfund; wieviel muß ein 9 Gr. Brodt wiegen, wenn der Himten 27 Gr. gilt? Je theurer die Frucht ist, desto weniger Pfund wiegt das Brodt.

1 Pfund, 27 Gr. } — — 9 Gr. Brodt
6 Gr. Brodt — — { 12 Pfund / 1 Thlr.
1 Thlr. — — 36 Gr. Fac. 24 Pf.

29) Es sollen 64 Ellen Tuch, das $1\frac{1}{2}$ breit ist, mit Leinwand, die $\frac{5}{4}$ breit ist, gefüttert werden; wieviel Ellen Leinwand braucht man dazu?

1 Ellen, $\frac{5}{4}$ breit — — 64 Ellen, $1\frac{1}{2}$ breit Fac. $76\frac{4}{7}$ Ellen.

30) Wenn der Himten Rocken $\frac{2}{3}$ Thlr. kostet, so erhält man 24 Pfund Brodt für 12 Gr. Cassengeld; wieviel kosten 36 Pfund Brodt in Golde, wenn der Himten 1 Thlr. kostet?

1 Gr. Gold — — 36 Pfund, 1 Thlr.

24 Pfund, $\frac{2}{3}$ Thlr. — — 12 Gr. Cassg.

14 Cassg. — — 15 Gold Fac. $28\frac{13}{14}$ Gr. Gold

Wenn in einer Aufgabe der Gewinn oder Verlust auf eine eingekaufte und verkaufte Waare mit in Erwegung kömmt, so muß das ausgelegte Geld vom gehobenen unterschieden werden. Denn 100 Thlr. sind zwar in allen Fällen 100 Thlr. allein es ist doch ein wesentlicher Unterschied, ob ich 100 Thlr. ausgebe, oder ob ich 100 Thlr. einnehme. Man nennet daher das Geld, für welches eine Waare eingekauft wird, ausgelegt Geld; das Geld, welches im Verkaufe für eine Waare eingenommen wird, gehoben Geld.

31) 325 Pfund kosten 450 Thlr. im Einkaufe, für wieviel Gr. muß 1 Loth wieder verkauft werden, wenn 20 auf 100 gewonnen werden sollten, das ist, wenn man für 100 Thlr. ausgelegtes Geld, 120 gehobenes haben will. Denn es würde ein schlechter Gewinn seyn, wenn man aus einer Waare die 100 Thlr. kostet, im Verkaufe nur 20 Thlr. lösen wollte. Man will das ausgelegte Geld, und 20 Thlr. darüber lösen.

1 Gr. gehoben — — 1 Loth
325 Pfund — — 450 Thlr. ausgel.
100 ausgelegt — — 120 gehoben
1 Thlr. $\frac{4}{5}$ — — 36 Gr. Fac. $2\frac{113}{130}$ Gr.

32) Ein

32) Ein Kaufmann bezahlt eine Menge Tuch, die Elle mit 3 Thaler 12 Groſchen; er verkauft die Elle für 4 Thaler, wieviel gewinnet er auf 100?

1 Thlr. gehob. — — 100 ausgel.
$3\frac{1}{3}$ Thlr. ausgel. — — 4 Thl. gehob. F. 120 Thlr.

Weil er für 100 ausgel. 120 gehoben hat, ſo hat er 20 Procent gewonnen.

33) 100 Pfund werden für $63\frac{1}{3}$ Thaler eingekauft, man verliert auf dieſe Summe $4\frac{1}{2}$ Thaler im Verkaufe; für wieviel Groſchen iſt 1 Pfund verkauft?

1 Gr. gehob. — — 1 Pf.
100 Pf. — — $63\frac{1}{3}$ ausgel.
$63\frac{1}{3}$ ausgel. — — $58\frac{5}{6}$ gehob.
1 Thlr. — — 36 Gr. Fac. $21\frac{9}{10}$ Gr.

34) 120 Ellen werden für 64 Thaler eingekauft; wie hoch muß eine Elle wieder verkauft werden, um die Hälfte damit zu gewinnen?

1 Thlr. gehob. — — 1 Elle
120 Ellen — — 64 Thlr. ausgel.
1 ausgel. — — $1\frac{1}{2}$ gehob. Fac. $\frac{4}{7}$ Thl.

35) Wieviel Groſchen ſind $\frac{4}{7}$ Thaler?

1 Gr. — $\frac{4}{7}$ Thlr.
1 Thlr. — 36 Gr. Fac. $28\frac{4}{7}$ Gr.

36) Wenn der Himten 1 Thaler gilt; ſo koſten 26 Pfund Brod 20 Groſchen; wieviel Groſchen hat der Himten gekoſtet, da 6 Pfund Brod 2 Groſchen galten?

1 Gr. — — 1 Himt.
6 Pf. — — 2 Gr.
1 Himt. — 1 Thlr.
20 Gr. — — 26 Pf.
1 Thlr. — — 36 Gr. Fac. $15\frac{3}{5}$.

37) Ein Fuhrmann ist schuldig für 46 Thaler 240 Pfund 108 Meilen zu fahren, man legt ihm aber nur 160 Pfund auf; wieviel Meilen muß er diese für 40 Thaler fahren?

1 Meil. } — — 40 Thlr.
160 Pf. }

46 Thlr. — — { 240 Pf. / 108 M. } Fac. $140\frac{20}{23}$ Meil.

38) Es hat mir jemand 800 Thaler in Golde auf 2 Jahr ohne Zinse geliehen; ich habe demselben 1190 Thaler in Cassengelde wiederum geliehen; wie lange kann er diese behalten, damit der Dienst gleich werde?

1 Jahr. } — — { 800 Thlr. Gold / 2 Jahr }
1190 Thl. Cg. }
15 Gold — — 14 Cg. Fac. $1\frac{91}{357}$ Jahr.

Wenn in einer Aufgabe ein bestimmter Theil von einer gegebenen Zahl verlangt wird; oder wenn unter den Bedingungen solche befindlich ist, wo ihr Verhältniß in Theilen von einander angegeben ist; so kann man die Arbeit dadurch vermindern, daß man beyde Zahlen weg läßt, und nur das Verhältniß in kleinen Zahlen ausdrückt. Z. E. den dritten Theil von 57 Thaler 16 Gr. könnte man durch 1 zu $\frac{1}{3}$ oder durch 3 zu 1 ausdrücken. Oder $73\frac{11}{13}$ Ellen kosten 80 Thaler, wieviel kosten $7\frac{1}{2}$ mal so viele Ellen? Hier wäre es überflüßig, die $73\frac{11}{13}$ durch $7\frac{1}{2}$ zu multipliciren. Man setze statt $73\frac{11}{16}$ die Zahl 1, so ist $7\frac{1}{2}$ die zwote Zahl; denn es kömmt in der Kettenregel nicht auf die Größe der Glieder, sondern aufs Verhältniß der Glieder gegen einander an.

39) 36 Mädchen spinnen in 15 Wochen 9777 Stücke Garn; wieviel Mädchen müssen angenommen werden, wenn in 5 Wochen noch einmal so viel fertig seyn soll?

1 Mäd-

1 Mädch. } — — 2 Stück
5 Wochen }

1 Stück — — { 36 Mädch. / 15 Wochen. Fac. 216 Mädch.

40) Ein Freund hat mir einsmals 3977 Thaler 19 Groschen $3\frac{1}{2}$ Pfennige in schlechten Gelde 6 Jahr ohne Zinsen geliehen; jetzt leihe ich ihm den dritten Theil in Ducaten wieder, wie lange kann er dis Geld behalten, damit der Dienst gleich werde? 3 Thaler Ducaten sey 4 Thaler Münze.

1 Jahr } — — { 3 Münze / 6 Jahr
1 Duc. }
4 Münz. — — 3 Duc. Fac. $13\frac{1}{2}$ Jahr.

41) 24 Schreiber schreiben in 7 Monaten 3576 Bogen, wieviel Wochen arbeiten 38 Schreiber auf halb so viele Bogen?

1 Woch. } — — 1 Bog.
38 Schr. }

2 Bog. — — { 24 Schr. / 7 Mon.
1 Mon. — — 4 Woch. Fac. $8\frac{16}{19}$ Wochen.

42) Ein Fabrikant hat 3751 Arbeiter, er gebraucht des Jahrs 597 Thaler 5 Groschen 9 Pfennige Cassengeld für Brod, wenn er nämlich einem jeden täglich $\frac{1}{2}$ Pfund Brod giebt, und der Himten Rocken 27 Gr. 4 Pfennige gilt; die Casse des Fabrikanten will, daß er nur $\frac{3}{4}$ des Geldes in Golde an Brodt verwenden dürfe. Er schaffet daher die Hälfte der Arbeiter ab, der Kornpreis ist um $\frac{1}{4}$ gestiegen; wieviel Pfund Brod kann er bey solchen Umständen täglich einem jeden geben?

1 Pf. Brod }
1 Arbeiter } — — $\frac{3}{4}$ Gold
$\frac{5}{8}$ der Himt. }

1 Cassen-

1 Cassengeld — — { 2 Arb. ½ Pf. Brod 1 der Himt.

15 Gold — — 14 Casseng. Fac. $\frac{14}{15}$ Pfund.

Wenn in einer Aufgabe bloße Namen ohne Zahlen vorkommen; so schreibt man nur die Namen in ihre gehörige Stellen.

43) Wenn 22 Arbeiter in 6 Wochen 2 Tage ein gewisses Werk verfertigen; wie lange arbeiten 18 Arbeiter daran?

1 Wochen, 18 Arbeiter } — — Werk

Werk — — { 22 Arbeiter, $6\frac{2}{7}$ Wochen. F. $7\frac{43}{63}$ Woch.

44) 1000 Menschen leben von einer gewissen Menge Korn 20 Wochen; wieviel gebrauchen 650 Menschen von diesem Korn, wenn sie 42 Wochen davon leben sollen?

1 Korn — { 650 M. 42 W.

1000 M., 20 W. } — Korn. Fac. $1\frac{73}{200}$ von dem Vorrathe.

45) Eine gewisse Anzahl Arbeiter hat eine Mauer in 4 Wochen verfertigt; wieviel Arbeiter muß man haben, eine solche Mauer in 7 Wochen fertig zu erhalten?

1 Arb., 7 Woch. } — — Mauer

Mauer — — { Arbeiter, 4 Wochen. Fac. $\frac{4}{7}$ der Arbeit.

46) Wenn man die Elle Leinewand für 10 Groschen verkauft, so verliert man auf 64 Ellen 4 Thaler; wieviel sind für 64 Thaler eingekauft?

1 Ell.

1 Ell. — — 64 Thlr. ausgel.
10 Gr. gehob. — 1 Ell.
64 ausgel. — — 60 gehob.
1 Thlr. — — 36 Gr. Fac. 216 Ell.

47) Zu einem Kleide gebraucht man 7 Ellen $\frac{2}{4}$ breites Zeug; wieviel Ellen $\frac{5}{4}$ breites Zeug gebraucht man dazu?

1 Ell. / $\frac{2}{4}$ Br. — — { 7 Ell. / $\frac{2}{4}$ Br. Fac. $12\frac{3}{5}$ Ellen.

48) 856 Pfund kosten 24 Thaler in Gulden; wieviel Thaler kosten sie in Golde? 9 Thaler Gulden sey 10 Thaler Gold.

1 Thlr. Gold — 856 Pfund
856 Pf. — — 24 Thlr. Gulden
9 Guld. — — 10 Gold. Fac. $26\frac{2}{3}$ Thl. Gold.

49) 856 Pfund kosten 24 Thaler in Gulden; wieviel Gulden kosten sie in Golde, da 9 in Gulden 10 in Golde sind?

1 Guld. Gold — — 856 Pf.
856 Pf. — — 24 Thlr. Gulden
2 Thlr. — — 3 Gulden
9 in Gulden — — 10 in Golde. F. 40 Guld.

50) In einer belagerten Stadt liegen 1700 Soldaten, diese haben auf 54 Tage Proviant; weil sie aber vor 60 Tagen keine Hülfe erwarten können; so ist die Frage, wieviel Soldaten in der Stadt bleiben müssen, damit sie 60 Tage vom Proviante leben können?

1 Sold. / 60 Tage — — Proviant

Proviant — — { 1700 Sold. / 54 Tage. Fac. 1530 Sold.

51) Man

51) Man hat für 7597 Schaafe auf 25 Wochen Futter; man verkauft $\frac{1}{4}$ von den Schaafen. Wie lange können die überbliebenen vom Vorrathe erhalten werden?

1 Wochen
$\frac{3}{4}$ Schaafe } — — Futter

Futter — — { 1 Schaaf
25 Woch. Fac. $33\frac{1}{3}$ Wochen.

52) Wenn 4 Citronen für $1\frac{3}{4}$ Groschen verkauft werden; um $9\frac{3}{8}$ mit 100 zu gewinnen, wie theuer kommen 5 Citronen?

1 Gr. ausgel. — — 5 Citr.
4 Citr. — — $1\frac{3}{4}$ Gr. gehob.
$109\frac{3}{8}$ gehob. — — 100 ausgel. Fac. 2 Gr.

53) Eine Leinewandhändlerinn kauft 64 Ellen für 28 Thaler; sie verkauft die Elle wieder für 14 Groschen; verliert oder gewinnet sie?

1 Gr. — — 1 Elle
64 Ell. — — 48 Thlr.
1 Thlr. — — 36 Gr. Fac. 27 Gr. kostet ihr 1 Elle.

54) Es kauft jemand für 36 Thaler Korn, den Himten zu 12 Groschen, er findet sich genöthigt, mit Schaden zu verkaufen; nachdem dieses geschehen, hat er 5 Thaler verloren; wie theuer hat er den Himten wieder verkauft?

1 Gr. gehob. — — 1 Himt.
1 Himt. — — 12 Gr. ausgel.
36 Thlr. ausgel. — 31 gehob. Fac. $10\frac{1}{3}$ Gr.

55) Wenn 100 Thaler in einem Jahre $4\frac{1}{2}$ Thaler Zinse bringen; in wieviel Wochen bringen 350 Thaler $1\frac{1}{2}$ Thaler Zinse?

1 Woch.

1 Woch. } — — 1½ Thlr. Zinse
350 Thlr. }

4½ Thlr. — — { 100 Thlr. / 1 Jahr

1 Jahr — — 52 Woch. Fac. 4 20/21 Woch.

56) Es kauft jemand 3 Centner Waare Bremer Gewicht für 186 Thaler Gold; für wieviel Pfennige muß er in Hannöverschen Gewichte das Quentgen in Cassengelde wieder verkaufen, wenn er auf 100, 20 gewinnen will? 100 Pfund Bremer sey 99 Pfund Hannöv.

1 Pf. Cassg. gehöb. — 1 Quentg. Hanöv.
3 Cent. Bremer — 186 Thlr. Gold ausgel.
1 Thlr. — — 36 Gr.
1 Gr. — — 8 Pf.
100 Pfund — — 1 Centn.
32 Loth — — 1 Pf.
1 Quentg. — — 1 Loth
15 Gold — — 14 Cassg.
99 Hanöv. — — 100 Bremer
100 ausgel. — — 120 gehöb. F. 1 152/275 Pf. Cssg.

57) Wenn das Orthoft Wein 48 Thaler 16 Groschen kostet, wieviel Groschen kömmt eine Bouteille? 1 Orthoft ist 6 Anker, 1 Anker 40 Bouteillen.

1 Gr. — — 1 Bout.
1 Orth. — — 48 4/9 Thlr.
1 Thlr. — — 36 Gr.
6 Ank. — — 1 Orth.
40 Bout. — 1 Ank. Fac. 7 4/12 Gr.

58) 5 6/7 Thaler sollen unter 7 Personen vertheilt worden; wieviel Groschen bekömmt 1 Person.

1 Gr. — — 1 Pers.
7 Pers. — — 5 6/7 Thlr.
1 Thlr. — — 36 Gr. Fac. 30 6/49 Gr.

59) 360

59) 360 Kühe haben auf 1 Jahr Futter; können 270 Kühe 15 Monate damit auskomen?

1 Monat } — — Fut.
270 Kühe }

Futt. — — { 360 Kühe. 1 Jahr.

1 Jahr — — 12 Mon. Fac. 16 Monate können sie erhalten werden.

60) Ein Mann ist eine Billion Pfennige reich; er ist aber ein solcher Verschwender, daß er jede Stunde 1000 Thaler ausgiebt, und nichts einnimmt; in wie vielen Jahren ist sein Geld ausgegeben?

1 Jahr — — 1000000000000 Pfennige
1000 Thlr. — — 1 Stunde
36 Gr. — — 1 Thlr.
8 Pf. — — 1 Gr.
365 Tage — — 1 Jahr
24 St. — — 1 Tag. Fac. $396\frac{469\cdot 6}{126144}$ Jahr.

61) Ein Bedienter bekömmt des Jahrs $3\frac{1}{2}$ Louisd'or; wieviel Groschen hat er des Tags in Cassengelde?

1 Gr. — — 1 Tag
1 Jahr — — $3\frac{1}{2}$ Louisd'or
1 Louisd'or — — 5 Thlr.
1 Thlr. — — 36 Gr.
15 Gold — — 14 Cassen.
365 Tage — — 1 Jahr. Fac. $1\frac{225}{365}$ Grosch.

62) Man ist 314 holländische Gülden schuldig, welche man in Ducaten bezahlen will; das Verhältniß zwischen Ducaten und Gülden ist unbekannt. Man weiß aber, daß 1 Gülden 20 Gr. Cassengeld ist, wie viel Stück Ducaten bezahlt man?

1 Duc.

1 Duc.	— —	314 Gülden
1 Güld.	— —	20 Gr. Cassenq.
$2\frac{2}{3}$ Thlr. Cassenq.	—	1 Duc.
36 Gr.	— —	1 Thlr. Fac. $65\frac{5}{12}$ Duc

63) Die Casse des Commendanten einer Festung ist nur so stark, daß er seine Garnison, welche aus 360 Mann bestehet, 4 Wochen besolden kann, wenn er jeden Mann täglich 1 Groschen 2 Pfennige giebt. Es werden noch 100 Mann hinein gelegt, und er soll sich 6 Wochen halten; wieviel Pfennige kann er täglich einen Mann geben?

1 Pf.		360 M.
460 M.	— —	4 W.
6 W.		$1\frac{1}{4}$ Gr.
1 Gr.	— —	8 Pf. Fac. $5\frac{5}{23}$ Pfenn.

64) Man kauft 100 Pfund für $62\frac{1}{2}$ Thaler; und verkauft 10 Pfund wieder für 7 Thaler; wieviel ist mit 100 Thaler gewonnen?

1 Thlr. gehob.	—	100 ausgel.
$62\frac{1}{2}$ Thlr. ausgel.	—	100 Pfund
10 Pfund	—	7 Thl. gehob. F. 1 1 2 vor 100

Die Planeten sind von der Sonne in folgenden Verhältnissen entfernt.

Mercur	—	4
Venus	— —	7
Erde	— —	10 ist 22000 halbe Erddurchmesser
Mars	— —	15
Jupiter	—	52
Saturn	—	95

Da nun die wahre Entfernung der Sonne von der Erde, nämlich 22000 halbe Erddurchmesser oder halbe Dicken der Erdkugel beträgt, und diese wahre Entfer-

nung durch 10 ausgedrückt ist; so kann man durch obige Verhältnisse die wahre mittlere Entfernung aller Planeten von der Sonne, in halben Erddurchmessern, finden.

65) Wieviele halbe Erddurchmesser ist der Planet Mercur von der Sonne entfernt?

T h. Erdd. 4 Mercur
10 Erde — 22000 halbe Erdd. Fac. 8800 h. Erdd.

66) Wieviele halbe Erddurchmesser ist die Venus von der Sonne?

T h. Erdd. — 7 Venus
10 Erde — 22000 h. Erdd. Fac. 15400 h. Erdd.

67) Wieviele halbe Erddurchmesser ist der Jupiter von der Sonne?

T h. Erdd. — — 52 Jupiter
10 Erde — — 22000 h. Erdd. Fac. 114400.

Ein halber Erddurchmesser hält 860 geographische Meilen; 15 dieser Meilen gehen auf einen Grad des Aequators der Erde. Diese Meilen sind nirgends gebräuchlich. $17\frac{1}{2}$ sächsische Meile machen einen Grad der Erde aus; folglich sind $17\frac{1}{2}$ sächsische Meilen so groß als 15 geographische Meilen. Ein Fußgänger legt eine sächsische Meile durch einen starken Schritt in zwoen Stunden zurück. Der Umkreis der Erde hat 5400 geographische Meilen.

Vermöge dieser Angaben, lassen sich die hier folgenden 7 Aufgaben berechnen.

68) Wieviel geographische Meilen ist die Sonne von der Erde?

T geog. M. — 22000 halbe Erddurchm.
1 h. Erdd. — 860 geog. Meil. Fac. 18920000.

69) Wie-

69) Wieviel sächsische Meilen ist die Sonne von der Erde entfernet?

1. sächs. Meil. — 22000 h. Erddurchm.
1 halb. Erdd. — 860 geograph. Meil.
15 geog. Meil. — $17\frac{1}{2}$ sächs. M. F. 22073333$\frac{1}{3}$.

70) Wieviel sächsische Meilen ist der Umkreis der Erde?

1 sächs. Meil. — 5400 geogr. Meil.
15 geog Meil. — $17\frac{1}{2}$ sächs. M. Fac. 6300 s. M.

71) Wieviel sächsische Meilen ist die Venus von der Sonne?

1 sächs. Meil. — 7 Venus
10 Erde — 22000 h. Erdd.
1 h. Erdd. — 860 geogr. Meil.
15 geog Meil. — $17\frac{1}{2}$ s. Meil. Fac. 15451333$\frac{1}{3}$.

72) Eine Kugel mag jede Stunde 10 geographische Meilen fliegen; in wievielen Jahren erreicht diese Kugel von der Erde die Sonne?

1 Jahr — 18920000 geogr. Meil.
10 geog. M. — 1 Stunde
365 Tage — 1 Jahr
24 Stund. — 1 Tag. Fac. 215$\frac{8600}{8760}$ Jahr.

73) Wenn eine Canone aus der Sonne zum Saturn geschossen würde, und die Kugel flöge in jeder Stunde 30 geographische Meilen; in wievielen Jahren würde die Kugel den Saturn erreichen?

1 Jahr — — 95
10 — — 22000 halbe Erddurchm.
1 h. Erdd. — 860 geogr. Meil.
30 geog. Meil. — 1 Stunde
24 Stund. — 1 Tag
365 Tage — — 1 Jahr. Fac. 683$\frac{12}{13}\frac{8}{14}$ Jahr.

74) Der Mond ist in seiner mittlern Entfernung von der Erde 57 halbe Erddurchmesser. Wieviel sächsische Meilen ist der Mond von der Erde entfernt?

1 sächs. Meil. — 57 halbe Erddurchm.
1 h. Erddurchm. — 860 geogr. Meil.
15 geogr. Meil. — $17\frac{1}{2}$ sächs. M. Fac. 57190 s. M.

75) Wenn 10 Weber in 7 Wochen, da sie jede Woche 3 Tage, und des Tags 8 Stunden arbeiten, 90 Stück $\frac{7}{4}$ breites Zeug verfertigen; wieviele Stücke einer Elle breites Zeug werden 16 Weber in 5 Wochen verfertigen, da sie wöchentlich 6 Tage, und des Tags 7 Stunden arbeiten?

1 Stück, 1 Ell. br. — — { 16 Web. 5 Woch. 6 Tage 7 Stund.

10 Weber, 7 Woch. 3 Tage 8 St. — — { 90 Stück $\frac{7}{4}$ breit. Fac. 315 Stück.

76) Ich habe in Hamburg 45 Mark Banco zu bezahlen, diese will ich in Ducaten entrichten. Ich weiß aber nicht, wie sich Banco gegen Ducaten verhält; ich weiß auch nicht, wie sich hamburger Courant gegen Ducaten verhält; ich weiß aber, daß 125 Courant 100 Banco sind, und daß 13 Mark Courant 1 Louisd'or machen. Wieviel Ducaten muß ich für obige 45 Mark Banco bezahlen?

1 St. Duc. — 45 Mark Banco
100 Mark Banco — 125 Mark Cour.
13 Mark Cour. — 1 Louisd'or
1 Louisd'or — 5 Thlr.
$2\frac{5}{8}$ Thlr. — 1 Duc. Fac. $7\frac{281}{442}$ St. Duc.

Wenn

Wenn das Verhältniß zwischen der gegebenen und gesuchten Geldsorte bekannt ist; so ist kein Irrthum im Ordnen das Exempels zu besorgen. Wenn aber das Verhältniß erst durch viele Mittelglieder erreicht werden muß, so kann sich gar leicht ein Fehler einschleichen. Um aber einem Irrthume vorzubeugen, darf man nur bey dem Hauptsatze bemerken, was durch solchen gefunden, und bey jedem Verhältnisse, wohin das Facit des Hauptsatzes durch das Verhältniß abgeändert werde. Hierdurch wird man leicht sehen, ob das gesuchte Ziel schon oder noch nicht erreicht sey, und welcher Satz noch fehle. Um dieses in einem Exempel zu zeigen, mag die vorige Aufgabe dienen.

1 Stück Ducaten — 45 Mark B.
100 Mark Banco — 125 Mark C. } Mark Cour.
13 Mark Cour. — 1 Louisd'or St. ½ Louisd'or
1 Louisd'or — 5 Thlr. Thlr. in Louisd'or
2½ Thlr. — — 1 Duc. — Stück. Duc.

77) Wieviel Thaler sind unter vorigen Angaben 45 Mark Banco?

1 Thlr. — — 45 Mark B.
100 Banc. — — 125 Cour.
13 Mark C. — — 1 Louisd'or
1 Louisd'or — 5 Thlr. Fac. 21 $\frac{33}{52}$ Thlr.

78) Wieviel Louisd'or sind 350 Ducaten?

1 Louisd'or — — 350 Duc.
1 Duc. — — 2½ Thlr.
5 Thlr. — — 1 Louisd'or. F. 198½.

79) Es ist jemand 500 Stück von Achten nach Lissabon zu bezahlen schuldig, er will solche in Louisd'or entrichten; wieviele Stück Louisd'or sind obigem Capitale gleich? 1 Stück von Achten ist 8 Real, 1 Ducaten ist 10 Real.

1 Louisd'or — 500 St. v. A.
1 St. v. A. — 8 Real
10 Real — 1 Duc.
1 Duc. — $2\frac{1}{6}$ Thlr.
5 Thlr. — 1 Louisd'or. Fac. $226\frac{2}{3}$ Louisd'or.

80) Wieviel Thaler ist 1 Stück von Achten?

1 Thlr. — — 1 St. v. A.
1 St. v. A. — — 8 Real
10 Real — — 1 Duc.
1 Duc. — — $2\frac{5}{6}$ Thlr. Fac. $2\frac{4}{15}$ Thlr.

81) Man gebraucht 20 Himten, um 7 Schaafe 25 Wochen zu erhalten; wieviel Himten müssen angeschafft werden, um 9 Schaafe $\frac{5}{4}$ Jahr zu erhalten?

1 Himt. — — { 9 Sch. $\frac{5}{4}$ Jahr.
7 Schafe 25 Woch. — — 20 Himt.
1 Jahr — — 52 Woch. F. $66\frac{5}{7}$ Himt.

82) 10 Bediente gebrauchen in $\frac{1}{4}$ Jahre 14 Himten; können 13 Bediente von 100 Himten Korn $\frac{5}{4}$ Jahr mit Brod versorgt werden?

1 Himt. — — { 13 Bediente $\frac{5}{4}$ Jahr
10 Bed. $\frac{1}{4}$ Jahr — — 14 Himt. Fac. 91 Himt.

83) Man gebraucht des Jahrs für 54 Thaler Talglichter, wenn man 6 Groschen für 1 Pfund giebt; ein Pfund Wachslichter kostet 14 Groschen, dagegen kann man mit 2 Pfund Wachs so weit als mit $3\frac{3}{4}$ Pfund Talg kommen; wieviel Thaler verbraucht man des Jahrs in Wachslichtern?

1 Thlr.

1 Thlr.	—	—	14 Gr. Wachs
6 Gr. Talg	—	—	54 Thaler
$3\frac{3}{4}$ Talg	—	—	2 Wachs. Fac. $67\frac{1}{5}$ Thlr.

Weil durch das Verhältniß $3\frac{3}{4}$ zu 2 das Facit kleiner werden soll, so erhält die größeste Zahl ihren Platz in der Theilcolumne.

84) Zwo Personen trinken jährlich 767 Bouteillen Bier, die Bouteille 2 Groschen, welches des Jahrs $42\frac{1}{3}$ Thaler beträgt; sie wollen statt dessen Wein, die Bouteille 6 Groschen, trinken, jedoch in der halben Menge; wieviel Thaler wird ihnen des Jahrs der Weintrunk kosten?

1 Thlr.	—	—	$\frac{1}{2}$ Bout. 6 Gr.
1 Bout. 2 Gr.	—	—	$24\frac{1}{3}$ Thlr. Fac. $63\frac{1}{3}$ Thlr.

85) Wenn ein Pfund für 11 Groschen verkauft wird, so gewinnet man 10 auf 100; wie groß ist der Gewinn auf 100, wenn 1 Pfund für 10 Groschen verkauft wird?

1 gehob.	—	100 ausgel.
1 Pf.	—	10 Gr. gehob.
11 Gr. gehob.		1 Pf.
100 ausgel.	—	110 geh. F 100. Folgl. nichts gewonnen.

86) Man bezahlt für eine Last Korn 75 Thaler, verkauft sie für 81 Thaler, es gehen aber an jeder Last 3 Scheffel im Verkaufe verlohren; wieviel Thaler gewinnet man vor hundert? 1 Last hat 108 Scheffel.

1 Thlr. gehob.	—	—	100 ausgel.
75 ausgel.	—	—	81 gehob.
108 Scheffel	—	—	105 Scheffel. Fac. 105 Thl.

87) Die jährliche Brenhansconsumtion von 767 Bouteillen, die Bouteille 2 Groschen, beträgt $42\frac{1}{3}$ Thaler; wie hoch wird die jährliche Ausgabe seyn, wenn statt des Brenhans ein Getränk, wovon die Bouteille 5 Pfennige kostet, getrunken wird?

1 Gr.	—	—	{ 767 Bout. / 5 Pfennige
767 Bout. / 2 Gr.	—	—	$42\frac{1}{3}$ Thlr.
8 Pfennige	—		1 Gr. Fac. $23\frac{11}{48}$ Gr.

Wenn eine Waare mit dem, worinn sie gepacket ist, gewogen worden, oder wenn verdorbene Waare zwischen der guten ist, die mit gewogen ist, so benennen die Kaufleute das angegebene Gewicht **Brutto**. **Netto** nennen sie, wenn eine Waare rein gewogen ist; **Tara** heißt dasjenige, was abgezogen wird.

88) Wenn 3 Centner hamb. Gewicht brutto 600 Gulden kosten; für wieviele Pfennige in Golde muß man ein Quentgen hannöverisches Gewicht netto verkaufen, um 20 auf 100 zu gewinnen? 9 hamb. Gewicht sey 8 hannöv. Gewicht, 5 in Gulden 6 in Golde, 100 Brutto 98 Netto.

1 Pf. Gold. gehob.	—		1 Quentg. hannöv. Netto
3 Centn. hamb. Brutto			600 Guld. ausgel.
5 in Gulden	—	—	6 in Golde
100 Pf.	—	—	1 Centn.
32 Loth	—	—	1 Pf.
4 Quentg.	—	—	1 Loth
1 Gulden	—	—	24 Gr.
1 Gr.	—	—	8 Pf.
8 hannöv.	—	—	9 hamb.
98 Netto	—	—	100 Brutto
100 ausgelegt	—	—	120 geh. Fac. $4\frac{47}{49}$ Pf. Gold.

89) Es

89) Es wird 1 Quentgen hannöverisch Gewicht Netto für 4 Pfennige in Cassengelde verkauft, man hat 20 auf 100 gewonnen; wieviel Mark Banco haben $4\frac{1}{2}$ Centner hamb. Gewicht Brutto gekostet? Man weiß nicht, wie sich Banco gegen Cassengeld verhält; 6 Mark Banco sind 1 Ducaten; 9 hamb. Gewicht sey 8 hannöverisch. Gewicht; 100 Brutto 98 Netto.

1 Mark Banco ausgel.	—		$4\frac{1}{2}$ Centn. hamb. Br.
1 Quentg. hannöv. Netto			4 Pf. Cssg. gehoben
8 Pf.	—	—	1 Gr.
36 Gr.	—	—	1 Thlr.
$2\frac{2}{3}$ Thlr. Cssg.	—	—	1 Duc.
1 Duc.	—	—	6 Mark Banco
1 Centn.	—	—	100 Pfund
1 Pfund	—	—	32 Loth
1 Loth	—	—	4 Quentg.
9 hamb. Pf.	—	—	8 hannöv. Pf.
100 Brutto	—	—	98 Netto
120 gehob.	—	—	100 ausg. F. $1306\frac{2}{3}$ M.

90) Zu einer Planke gebraucht man 300 Stück, 12 Fuß lange und 1 Fuß 3 Zoll breite Dielen; wieviel Stück 11 Fuß lange und $1\frac{1}{2}$ Fuß breite Dielen gebraucht man eben dazu?

1 Stück 11 Fuß l. $1\frac{1}{2}$ Fuß br.	—	—	Planke
Planke	—	—	300 Stück 12 Fuß lang $1\frac{1}{4}$ Fuß br. F. $272\frac{8}{11}$ St.

91) Wenn der Himten 1 Thaler gilt, so kann man mit 200 Thalern in Golde 7 Bediente $1\frac{1}{2}$ Jahr in Brod erhalten; wieviele Bediente können gehalten werden, wenn man $2\frac{3}{4}$ Jahr mit 400 Thaler Cassengeld

im Brode reichen will, und der Himten 1 Thaler 9 Groschen kostet?

1 Bediente $2\frac{3}{4}$ Jahr $1\frac{1}{4}$ Thlr.	— —	400 Thlr. Essg.
200 Thlr. Gold	— —	7 Bediente $1\frac{1}{2}$ Jahr 1 Thlr. der Himt.
14 Essg.	— —	15 Gold. Fac. $6\frac{6}{11}$ Bed.

92) Der jährliche Aufwand einer Speisegesellschaft an weißen Brodte, von welchem der Himten Mehl zu 1 Thaler 30 Groschen ausgebacken ist, beträgt 77 Thaler; man will, um diese Ausgabe zu vermindern, Brod essen, von welchem der Himten Mehl zu 34 Groschen ausgebacken ist; wie groß wird der jährliche Vortheil seyn?

1 Thlr.	— —	34 Gr. Mehl
$1\frac{5}{7}$ Thlr. Mehl	—	77 Thlr.
36 Gr.	— —	1 Thlr. Fac. $39\frac{2}{3}$ Thlr.

Der Vortheil ist also $37\frac{1}{3}$ Thlr.

93) Wieviel Thaler muß man in guten Gulden anlegen, wenn man 12 Pferde 3 Jahre in Hafer erhalten will, wenn nämlich der Himten 15 Groschen in Golde gilt, da man 2 Pferde mit 60 Thaler in Louisd'or 48 Wochen erhalten kann, wenn der Himten 24 Groschen Cassengeld kostet? 110 Thaler Louisd'or sind 100 Thaler Gulden.

1 Thlr. Guld. — — { 12 Pferde / 3 Jahr / 15 Gr. Gold

2 Pferde / 48 Woch. / 24 Gr. Cg. — — 60 Thlr. Gold.

110 Gold — — 100 Gulden

15 Gold — — 14 Casseng.

1 Jahr — — 52 Woch. Fac. $620\frac{5}{11}$.

94) Wieviel Pfund Kupfer, das Pfund $10\frac{1}{2}$ Gr. gerechnet, bekömmt man für $17\frac{2}{3}$ Ellen Leinewand, die Elle 19 Groschen 2 Pfennige.

Man wird sich der 6ten Regel des 8ten Kapitels erinnern, welche sagt: daß diejenigen Dinge mit ihrem Werthe, welche gegen einander vertauscht werden sollen, ihren Platz gegen einander über, das ist, in verschiedenen Columnen erhalten, und daß bey einem Tausche die Aehnlichkeit unnöthig sey.

Es erstreckt sich aber die Unähnlichkeit der Namen, nicht auf die Größen, welche den Werth bestimmen. Diese müssen zu gleicher Benennung abgeändert werden.

1 Pf. Kupf. — — $17\frac{2}{3}$ Ellen

$10\frac{1}{2}$ Gr. — — $19\frac{1}{4}$ Gr. Fac. $32\frac{42}{126}$ Pfund.

95) Man will 50 Pfund Thee, das Pfund 2 Thaler, gegen Weizen, den Himten zu 30 Groschen, vertauschen; wieviel Himten erhält man für den Thee?

1 Himt. — — 50 Pfund

30 Gr. — — 2 Thaler

1 Thlr. — — 36 Gr. Fac. 120 Himt.

96) Wieviel Louisd'or erhält man für 85 Ducaten?

1 Louis-

1 Louisd'or — — 85 Duc.
5 Thlr. — — $2\frac{5}{6}$ Thlr. Fac. $48\frac{1}{2}$ Louisd'or.

Das Gewicht des Silbers wird nach Marken bestimmt. 1 Pfund ist 2 Mark, oder 16 Loth cölnischen Silbergewichts, welches etwas leichter als Kramgewicht ist. Um die Güte des Silbers zu bestimmen, theilt man 1 Loth in 18 Grän. Nach der Menge des feinen Silbers, welches sich in einer Mark befindet, nennet man es 16löthig, 12löthig, 8löthig u. s. w. Der Zusatz des Silbers ist Kupfer. 16löthig Silber ist, von welchen eine Mark 16 Loth fein Silber in sich fasset, folglich keinen Zusatz hat. 12löthig besteht die Mark aus 12 Loth fein und 4 Loth Kupfer. 15löthig aus 15 Loth fein Silber und 1 Loth Kupfer.

97) Wieviel Loth 12löthig Silber bekömmt man für 86 Loth 14 löthig.

Man sieht leicht, daß in diesem Exempel beobachtet werden müsse, was bey einem Tausche zu beobachten ist.

1 Loth — — 86 Loth
12 löthig — 14 löthig Fac. $100\frac{1}{3}$ Loth

98) Ein Loth 12 löthig Silber kostet $21\frac{1}{2}$ Gr. wieviel kosten 34 Loth, 16 löthig?

1 Thlr. — — { 34 Loth / 16 löthig

1 Loth, 12 löthig } — — $21\frac{1}{2}$ Gr.
36 Gr. — — 1 Thlr. Fac. $27\frac{3}{4}$ Thlr.

99) Wenn die Mark fein Silber, zu 13 Thlr. in Louisd'or bezahlt wird, wie theuer kömmt 1 Loth 12 löthig in Cassengelde?

1 Gr.

1 Gr. Cassg. — — { 1 Loth / 12 löthig

16 Loth / 16 löthig } — — 13 Thlr. Golb.

15 Gold — — 14 Cassg.

1 Thlr. — — 36 Gr. Fac. $20\frac{19}{40}$ Gr. Essg.

100) Die Mark fein Silber kostet 13 Thl.; wieviel kosten 12 Mark 8 Loth Silber, das 11 Loth 12 Grän fein hält?

1 Thlr. — — { $12\frac{1}{2}$ Mark / $11\frac{2}{3}$ löthig

1 Mark / 16 löthig } — 13 Thlr. Fac. $118\frac{47}{96}$ Thlr.

101) Ein Goldschmidt empfängt 30 Mark Silber, welches die Mark 13 Loth 6 Grän fein hält, er soll Gefäße von 14 löthigen Silber davon verfertigen; wieviel 14 löthig Silber liefert er für obige 30 Mark?

1 Mark — — 30 Mark

14 löthig — — $13\frac{1}{3}$ löthig Fac. $28\frac{4}{7}$ Mark

102) Wieviel Loth sind $\frac{4}{7}$ Mark?

1 Loth — — $\frac{4}{7}$ Mark

1 Mark — — 16 Loth Fac. $9\frac{1}{7}$ Loth

103) Man giebt einer Haushälterin 608 Pfund Butter, sie soll $45\frac{1}{2}$ Woche mit solcher auskommen; wieviel kann sie jeden Tag verbrauchen?

1 Pfund — — 1 Tage

$45\frac{1}{2}$ Woche — — 608 Pf.

7 Tage — — 1 Woche Fac. $1\frac{579}{637}$ Pfund

104) Man gebraucht des Jahrs für 20 Thlr. Baumöl, das Pfund 6 Gr. 4 Pfenn. man will ein Oel gebrauchen, von dem das Pfund 5 Gr. kostet; wieviel wird der jährliche Aufwand seyn?

1 Thlr. — — 5 Gr.

$6\frac{1}{2}$ Gr. — — 20 Thlr. Fac. $15\frac{5}{13}$ Thlr.

105) Man

105) Man gebraucht des Jahrs für 86 Thlr. Butter, von welcher 2 Pfund 17 Gr. kosten; für wieviel Thlr. wird man in $2\frac{3}{4}$ Jahren von einer Butter gebrauchen, von welcher 3 Pfund 18 Gr. 4 Pf. kosten?

1 Thlr. — — $2\frac{3}{4}$ Jahr
3 Pfund — — 18 Gr. 4 Pf.
17 Gr. — — 86 Thlr.
1 Jahr — — 2 Pfund Fac. $171\frac{59}{102}$ Thlr.

106) Ein Wucherer nimmt jede Woche auf einen Thlr. 1 Pfennig Zinse, wieviel beträgt die Zinse jährlich auf 100 Thlr.

1 Thlr. Zinse — — { 100 Thlr. Cap. / 1 Jahr
1 Thlr. Cap. / 1 Woche } — — 1 Pfennig
1 Jahr — — 52 Wochen
36 Gr. — — 1 Thlr.
8 Pf. — — 1 Gr. Fac. 18 Thl. 2 Gr.

107) Man kauft 100 brabanter Ellen für 450 Gulden, wieviel Thlr. kommen 8 hanöverische Ellen in Louisd'or? 9 brab. Ellen seyn 10 hanöv. Ellen; 10 in Gulden seyn 11 in Louisd'or.

1 Thlr. Ld'r — 8 hanöv. Ellen } Gulden
100 brab. Ellen — 450 Gulden }
3 Gulden — 2 Thlr. — Thlr. in Gulden
10 in Gulden — 11 in Ld'r — Thlr. in Ld'r
10 hanöv. Ell. — 9 brab. Ell. Fac. $23\frac{19}{27}$ Thlr.

108) Zu 100 Ellen $\frac{5}{4}$ breit Leinwand, gebraucht man 98 Stück Garn; wieviel Stück muß man zu 318 Ellen $\frac{7}{4}$ breit Leinwand haben?

1 Stück — — { 318 Ellen / $\frac{7}{4}$ breit
100 Ellen / $\frac{3}{4}$ breit } — — 98 Stück Fac. $436\frac{148}{300}$ St.

109) Wie-

109) Wieviel Thlr. kosten 120 Pfund 6 Loth 3 Quentg. wenn 8 Pfund 4 Loth 16 Thlr. 7 Gr. 4 Pfen. kosten?

Diese Aufgabe nach (§. 159.) aufgelöset, giebt folgende zwey Exempel.

1 Thlr.	—	—	120 Pfund
$8\frac{1}{8}$ Pfund	—	—	$583\frac{1}{2}$ Gr.
36 Gr.	—	—	1 Thlr.

1 Gr.	—	—	$6\frac{3}{4}$ Loth
$8\frac{1}{8}$ Pfund	—	—	$583\frac{1}{2}$ Gr.
32 Loth	—	—	1 Pfund

1 Fac.	239 Thlr.	13 Gr.	$6\frac{10}{13}$ Pf.
2 Fac.	— —	15 —	$1\frac{49}{260}$ Pf.
Summa	239 Thlr.	28 Gr.	$7\frac{249}{260}$ Pf.

Der vollständigen Metalle, welche hier mit der Schwere eines Cubikfußes folgen, sind sechs. Gold wiegt 1326 Pfund 8 Loth, Bley 802 Pfund 4 Loth, Silber 720 Pfund 24 Loth, Kupfer 628 Pfund 12 Loth, Eisen 558 Pfund, Zinn 516 Pfund 4 Loth.

119) Eine Stange Eisen wiegt 2 Pfund 4 Loth; wieviel wiegt eine Stange Gold von gleicher Größe?

1 Pfund Gold — — $2\frac{1}{8}$ Pfund Eisen
558 Pfund Eisen — — $1326\frac{1}{4}$ Pf. G. F. $4\frac{14921}{18816}$ Pf.

110) Bloß die Abhängigkeit des Bodens verursacht das Fließen der Flüsse, und hinlängliche Beobachtungen haben es gewiß gemacht, daß ein mittelmäßig schneller Fluß der 200 Fuß, Ruthen, oder Meilen lang fließet, einen Fuß, 1 Ruthe, oder 1 Meile Fall hat.

Der Nilstrom fließet 1350 Meilen lang; wieviel Meilen höher liegt die Quelle als die Oberfläche des Meers, worein er sich ergießet? Oder wie viele Meilen ist die Oberfläche des Meers, dem Mittelpunct der Erden näher, als die Quelle?

1 Meil.

1 Meil. Fall — — 1350 lang
200 Länge — — 1 Fall Fac. 6¾ Meilen.

II. Abschnitt.

Anwendung der Kettenregel auf die Regel der Gesellschaft.

§. 209.

Die Gesellschaftsregel ist: wenn verschiedene Personen Antheil an einem Handel nehmen, und die Größe eines jeden Theils bestimmt werden soll. Da hier so viele Facitte gefunden werden sollen, als theilnehmende Personen sind; so verstehet es sich von selbst, daß die Kettenregel so oft angewandt werden müsse, so viel Facitte man haben will. **Man findet nämlich durch die Kettenregel, wieviel eines jeden Theil beträgt, wenn die Ausgabe aller Personen, den ganzen Gewinn oder Schaden giebt.**

111) a, b, c, handeln in Compagnie, a) giebt 1000 Thlr. b) 2500, c) 1500 Thlr. mit der Summe sind 2000 Thlr. gewonnen, wieviel bekömmt ein jeder vom Gewinne?

a) 1000
b) 2500
c) 1500
Summa 5000 Thlr.

1 Thlr. gew. — — 1000 Vorschuß
5000 Vorschuß — — 2000 gew. Fac. 400

1 Thlr. gew. — — 2500 Vorschuß
5000 Vorschuß — — 2000 gew. Fac. 1000

1 Thlr. gew. — — 1500 Vorschuß
5000 Vorschuß — — 2000 gew. Fac. 600

Addirt

Addirt man die gefundenen Facitte, so muß die Summe, wenn man richtig gerechnet hat, dem ganzen Gewinne gleich seyn.

112) Wenn man 3 Theile Saltartari, 2 Theile Salpeter, 1 Theil Schwefel klein gestoßen durch einander mischet, so erhält man ein Pulver, welches, wenn man etwas von solchen auf einen Pfennig legt, und solchen über ein brennendes Licht hält, einen starken Knall giebt. Man verlangt 4 Pfund von diesem Pulver, wieviel Pfund muß von jedem genommen werden?

Wieviel Pfund nimmt man von einer jeden Sorte, wenn die Summe aller Sorten 4 Pfund giebt?

1 Schwefel
2 Salpeter
3 Saltartari
Summe 6

1 Pfund — — 1 Schwefel
6 — — — 4 Pf. Fac. $\frac{2}{3}$ Pf. Schwefel

1 Pfund — — 2 Salpeter
6 — — — 4 Pf. Fac. $1\frac{1}{3}$ Pf. Salpet.

1 Pfund — — 3 Saltart.
6 — — — 4 Pf. Fac. 2 Pf Salt.

113) Ein Mann ist an a) schuldig 1000 Thlr. an b) 480, an c) 2480, an d) 60 Thlr. sein ganzes Vermögen ist 360 Thlr.; wieviel bekömmt ein jeder?

a) 1000
b) 480
c) 2480
d) 60
Summe 4020 Thlr.

T Thlr. — — 1000
4020 — — — 360 Fac. $89\frac{37}{67}$ Thlr.

T Thlr. — — 480
4020 — — — 360 Fac. $42\frac{66}{67}$ Thlr.

T Thlr. — — 2480
4020 — — — 360 Fac. $222\frac{6}{67}$ Thlr.

T Thlr. — — 60
4020 — — — 360 Fac. $5\frac{25}{67}$ Thlr.

114) 68 Thlr. sind bestimmt, für 444 Bogen abzuschreiben, a) schreibt 96 Bogen, b) 216, c) 132; wieviel Thlr. bekömmt ein jeder?

T Thlr. — 96 Bogen
444 Bog. — 68 Thlr. Fac. $14\frac{78}{111}$ Thlr.

T Thlr. — 216 Bog.
444 Bog. — 68 Thlr. Fac. $33\frac{9}{111}$ Thlr.

T Thlr. — 132 Bog.
444 Bog. — 68 Thlr. Fac. $20\frac{24}{111}$ Thlr.

115) Drey Personen kaufen ein Loos in einer Lotterie, a) giebt 4 Thlr. b) $2\frac{1}{2}$, c) $1\frac{1}{2}$, es wird auf das Loos 5000 Thlr. gewonnen, wieviel bekömmt ein jeder vom Gewinne?

4 Thlr.
$2\frac{1}{2}$ —
$1\frac{1}{2}$ —
Summe 8 Thlr.

T Thlr. — — 4
8 — — — 5000 Thlr. Fac. 2500 Thlr.

T Thlr. — — $2\frac{1}{2}$
8 — — — 5000 Thlr. Fac. $1562\frac{1}{2}$ Thlr.

T Thlr. — — $1\frac{1}{2}$
8 — — — 5000 Thlr. Fac. $937\frac{1}{2}$ Thlr.

116) Ein

116) Ein Wasserbau der 450 Thlr. kostet, wird von den Eigenthümern der Häuser, welche am Wasser stehen, nach der Breite der Häuser bezahlt; a) 5 Ruthen, b) 2 Ruthen, c) $2\frac{1}{2}$ Ruthe, wieviel bezahlt ein jeder?

5 Ruthen
2 —
$2\frac{1}{2}$ —

Summe $9\frac{1}{2}$ Ruthe.

1 Thlr. — — 5 Ruthen
$9\frac{1}{2}$ R. — — 450 Thlr. Fac. $236\frac{16}{19}$ Thlr.

1 Thlr. — — 2 Ruthen
$9\frac{1}{2}$ R. — — 450 Thlr. Fac. $94\frac{14}{19}$ Thlr.

1 Thlr. — — $2\frac{1}{2}$ Ruthe
$9\frac{1}{2}$ R. — — 450 Thlr. Fac. $118\frac{8}{19}$ Thlr.

117) Zu einen Kuchen gehören 16 Eyer, $3\frac{1}{4}$ Pfund Zucker, $4\frac{1}{8}$ Pfund Mehl; man hat aber nur 11 Eyer, wieviel muß vom Zucker und vom Mehle genommen werden, wenn die Güte des Kuchens unverändert bleiben soll?

In diesem Falle, und in ähnlichen Fällen, enthält die Aufgabe selbst die drey Größen, welche erfordert werden, um die vierte Proportionalzahl zu finden.

1 Pfund Zucker — — 11 Eyer
16 Eyer — — $3\frac{1}{4}$ Pf. Zuck. Fac. $2\frac{15}{64}$ Pf.

1 Pf. Mehl — — 11 Eyer
16 Eyer — — $4\frac{1}{8}$ Pf. Mehl Fac. $2\frac{107}{128}$ Pf.

Wenn irgend eine Handlung durch eine bestimmte Zeit geschiehet, und die Zeit mit in Erwegung gezogen wird; so macht dieses keine Schwierigkeit. Man multiplicirt, wenn z. E. Geld auf eine gewisse Zeit hergeschossen

schossen ist, das Geld durch die Zeit, und bringt das Produkt, statt der Größe des Capitals, in die Rechnung. Denn 4 Thlr. auf 2 Jahre hergeschossen, ist so viel, als 8 Thlr. auf 1 Jahr hergeschossen. Im übrigen verfährt man wie zuvor.

118) Ein Kauffmann hat 400 Thlr. auf 6 Monat, ein anderer 660 Thlr. auf 4 Monat, hergeschossen, es wird gewonnen 360 Thlr. wieviel bekömmt ein jeder vom Gewinne?

400 mal 6 ist 2400 Thlr.
660 mal 4 ist 2640 Thlr.
Summe 5040 Thlr.

T Thlr. — — 2400
5040 — — 360 Fac. $171\frac{3}{7}$ Thlr.

T Thlr. — — 2640
5040 — — 360 Fac. $188\frac{4}{7}$ Thlr.

119) Man giebt für eine Wiese 60 Thlr. Pacht; a) weidet darauf 50 Schaafe 4 Wochen lang, b) 30 Schaafe 6 Wochen, c) 20 Schaafe 3 Wochen. Wieviel bezahlt ein jeder von der Pacht?

50 mal 4 ist 200
30 mal 6 ist 180
20 mal 3 ist 60
Summe 440

T Thlr. — — 200
440 — — — 60 Fac. $27\frac{3}{11}$ Thlr.

T Thlr. — — 180
440 — — — 60 Fac. $24\frac{6}{11}$ Thlr.

T Thlr. — — 60
440 — — — 60 Fac. $8\frac{2}{11}$ Thlr.

III. Abschnitt.

Anwendung der Kettenregel, auf die Regula Allegationis, oder auf die Regel der Vermischung.

§. 210.

Wenn Dinge von verschiedenem Werthe, oder von verschiedener Güte, also mit einander vermischet werden sollen, daß ein gegebener Preis oder eine bestimmte Güte erfolgt; so ist die Kettenregel allein nicht hinlänglich, dieses zu bestimmen.

120) Man will einen Wein, von welchen die Bouteille 3 Gr. werth ist, mit einem Weine wo 12 Gr. die Bouteille werth ist, also versetzen, daß die Bouteille 7 Gr. werth sey; wieviel muß man von jeder Sorte nehmen?

Man setzt die gegebenen Preise unter einander, und den geforderten Preis zwischen beyde, etwas zur Seite, sucht hierauf durch Subtraction die Differenz zwischen den geforderten und den gegebenen Preisen, und schreibt die Differenzen kreuzweis. Diese Differenzen zeigen das Verhältnis, in welcher die Vermischung geschehen muß.

3 Gr. ——— 5
7 Gr.
12 Gr. ——— 4

Die Differenzen zeigen, daß vom 3 Gr. Weine 5, vom 12 Gr. Weine 4 Bouteillen zusammen gegossen werden müssen, um 7 Gr. Wein zu erhalten.

Probe.

9 Bout. 7 Gr. Wein sind 63 Gr. werth.
5 Bout. 3 Gr. Wein macht 15 Gr.
4 Bout. 12 Gr. Wein macht 48 Gr.

Summe 63 Gr.

121) Ein Maaß Bier ist $3\frac{1}{2}$ Gr. werth, man will es mit Wasser also versetzen, daß ein Maaß 3 Gr. werth sey; wieviel Wasser und wieviel Bier muß zusammen gegossen werden? Der Werth des Wassers ist Null.

$3\frac{1}{2}$ ——— 3

3

0 ——— $\frac{1}{2}$ F. 3 Maaß Bier u. $\frac{1}{2}$ Maaß Wasser.

122) Man hat 8 und 14 löthig Silber, in welcher Proportion schmelzt man beyde Sorten zusammen, um 12 löthig zu erhalten?

14 löthig —— 4

12

8 löthig —— 2 F. 4 Theile 14 löthig, u. 2 Th. 8 löth.

Weil im Silber das zugesetzte Kupfer nicht bezahlt wird, so ist der Werth des Kupfers Null.

123) Man braucht 13 löthig Silber; was muß man für ein Gemisch von 16 löthigem Silber und Kupfer machen?

16 —— 13

13

0 —— 3 Fac. 13 Theile Silber u. 3 Theile Kupf.

§. 211.

Wenn mehr als zwo Sorten mit einander vermischt werden sollen, so schreibt man über den geforderten Preis die höhern, und unter denselben die geringern gegebenen Sorten, setzt die Differenzen, zwischen dem geforderten und den höhern Preisen, gegen über, und die Differenzen zwischen dem geforderten und geringern Preisen, den höhern Preisen gegen über. Die Queersummen der Differenzen sind die gesuchten Größen.

124) In

124) In welchen Verhältnissen müssen die Weine, von welchen das Maaß 18 Gr. 16 Gr. 7 Gr. 5 Gr. 2 Gr. werth ist, mit einander vermischt werden, damit das Maas 8 Gr. werth sey.

18	—— 1, 3, 6	10	F.
16	—— 1, 3, 6	10	Man nimmt von jeder der bessern Sorten 10, der geringern Sorten 18 Maas.
	8		
7	—— 8, 10	18	
5	—— 8, 10	18	
2	—— 8, 10	18	

Probe.

10	Maaß	a	18	Gr.	ist	5	Thlr. — Gr.
10	—	a	16	—	—	4	— 16 —
18	—	a	7	—	—	3	— 18 —
18	—	a	5	—	—	2	— 18 —
18	—	a	2	—	—	1	— — —
					Summe	16	Thlr. 16 Gr.

Die Summe der gefundenen Maaßen 74 Maas. Das Maas 8 Gr. bringt ebenfalls 16 Thlr. 16 Gr.

§. 212.

Aus dem, was bisher von der Vermischung gesagt ist, fließen zwo Arten von Aufgaben: 1) man verlangt eine gewisse Menge von dem Gemische; wieviel muß von jeder Sorte genommen werden? 2) Man hat von einer Sorte eine gewisse Menge, wieviel muß von den übrigen Sorten zu dieser Menge gesetzt werden?

In beyden Fällen bedient man sich, nachdem zuvor die Verhältnisse, wie gezeigt ist, gefunden worden, der Kettenregel, und zwar gerade so, wie man sich ihrer bey der Regel der Gesellschaft bedient. Im ersten Falle spricht man: wieviel giebt ein Theil, wenn die Summe aller Theile die ganze gesuchte Menge giebt.

125) Es wird 110 Maas Wein, von welchem das Maas 12 Gr. werth seyn soll, gefordert. Der Verkäuffer will den geforderten Wein, aus Weinen, von welchen 1 Maas 18, 16, 9, 6 Gr. werth ist, zusammen gießen; wieviel muß er von jeder Sorte nehmen?

			Facit
18 —	3, 6	9 —	$26\frac{1}{19}$
16 —	3, 6	9 —	$26\frac{1}{19}$
12			
9 —	4, 6	10 —	$28\frac{18}{19}$
6 —	4, 6	10 —	$28\frac{18}{19}$
	38		S. 110 Maas.

1 M. — — 9
38 — — 110 Fac. $26\frac{1}{19}$ Maas.

1 M. — — 10
38 — — 110 Fac. $28\frac{18}{19}$ Maas.

126) Ein Pfund Wachs kostet 14 Gr. 1 Pfund Talg 6 Gr. man will 70 Pfund haben, das Pfund zu 9 Gr. wieviel muß von jeden genommen werden?

14 — 3 — $26\frac{1}{4}$ Pfund
9
6 — 5 — $43\frac{3}{4}$ Pfund
Summe 8

1 Pf. — 3
8 — 70 Pf.
Fac. $26\frac{1}{4}$ Pf.

1 Pfund — — 5
8 — — — 70 Pf. Fac. $43\frac{3}{4}$ Pf.

127) Man will 40 Mark 13 löthig Silber aus 16, 14, 8, und 5 löthigen Silber und Kupfer zusammen schmelzen, wieviel muß von jeder Sorte genommen werden?

16 —— 5, 8, 13	26 F. $16\frac{1}{4}$	T — 26			
14 —— 5, 8, 13	26 F. $16\frac{1}{4}$	64 — 40	Fac. $16\frac{1}{4}$.		
13					
8 —— 1, 3	4 F. $2\frac{1}{2}$	T — 4			
5 —— 1, 3	4 F. $2\frac{1}{2}$	64 — 40	Fac. $2\frac{1}{2}$.		
0 —— 1, 3	4 F. $2\frac{1}{2}$				

Summa 64

Im andern Falle, wenn nämlich von einer der gegebenen Sorten eine gewisse Menge da ist, und man finden soll, wieviel von einer jeden der übrigen Sorten, um eine bestimmte Güte zu erhalten, zugesetzt werden muß; werden die beygefügten Exempel der Kettenregel deutlicher als Worte sagen, wie diese Exempel zu ordnen sind.

128) 60 Himten Weizen, den Himten zu 1 Thaler gerechnet, soll also mit Rocken, den Himten zu 16 Groschen, versetzt werden, daß der Himten zu 28 Groschen verbacken werden kann; wieviel Himten Rocken müssen zu obigem Weizen gesetzt werden?

36 Gr. —— 12	1 Himt. R.	—	60 Himt. W.
28	12 W.	—	8 R. F. 40 H. R.
16 Gr. —— 8			

Probe.

60 Himt. Weiz. à 1 Thlr. macht 60 Thlr.
40 " Rocken " 16 Gr. " $17\frac{7}{9}$ "
100 " Sum. $77\frac{7}{9}$ "
100 Himt. à 28 Gr. betragen ebenfalls $77\frac{7}{9}$ Thlr.

129) Man hat 28 Maaß, das Maaß 6 Groschen. Man will es mit einer Sorte, das Maaß 1 Groschen, versetzen, daß das Maaß nach der Vermischung 4 Groschen 4 Pfennige werth sey; wieviel des geringern muß zugesetzt werden?

6 Gr. —— $3\frac{1}{2}$ 1 M. — 28
$4\frac{1}{2}$ Gr. $3\frac{1}{2}$ — $1\frac{1}{2}$. Fac. 12 Maaß.
1 s —— $1\frac{1}{2}$

130) 18 Loth 14löthig Silber soll mit Kupfer versetzt werden, daß es 12löthig werde; wieviel Loth Kupfer setzt man zu?

14 —— 12 1 Loth — 18 Loth
12 12 s — 2 s Fac. 3 L. Kupf.
0 —— 2

131) Man hat 60 Mark Silber, welches 9 Loth 4 Grän die Mark fein hält, man will es mit Silber, das 15 Loth 3 Grän die Mark fein hält, also versetzen, daß die Mark 11 Loth 15 Mark fein halte. Wieviel Mark muß zu obigen 60 Mark gesetzt werden? 1 Loth hat 18 Grän.

$9\frac{2}{3}$ —— $3\frac{1}{3}$ 1 M. — 60 M.
$11\frac{5}{6}$ $3\frac{1}{3}$ s — $2\frac{11}{18}$ s F. 47 Mark.
$15\frac{1}{6}$ —— $2\frac{11}{18}$

Wenn man ausrechnet, wieviel fein in 60 Mark $9\frac{2}{3}$löthiges Silber ist, so findet man $34\frac{7}{11}$ Mark. In 47 Mark $15\frac{1}{6}$löthiges Silber findet man $44\frac{53}{96}$ Mark fein. In beyden also $79\frac{13}{96}$ Mark fein. Man findet aber auch, daß in 107 Mark $11\frac{5}{6}$löthig. $79\frac{13}{96}$ Mark fein sey. Diese Gleichheit ist die Probe der Richtigkeit.

§. 213.

Wenn verschiedene Dinge, deren Menge und Preis gegeben ist, miteinander vermischt werden, und man soll den Werth oder die Güte der Mischung bestimmen; so multiplicire man jede Menge mit ihrem Werthe oder Gehalte, addire die gegebenen Mengen besonders und die gefundenen Produkte besonders zusammen. Die erste

erste Summe zeigt die ganze Menge der Vermischung, die zwote Summe den Preis derselben. Weiß man nun den Werth aller Pfunde; so ist der Werth eines Pfundes durch die Kettenregel leicht zu bestimmen.

132) Man gießt folgende Weine durcheinander: 4 Maaß, a 3 Groschen, 7 Maaß à 5 Groschen, 2 Maaß à 10 Groschen und 5 Maaß Wasser; wieviel ist 1 Maaß nach der Vermischung werth?

	4 M.	à 3 Gr.	ist 12 Gr.
	7 =	= 5 =	= 35 =
	2 =	= 10 =	= 20 =
	5 =	= 0 =	= 0 =
Summa	18 =	Summa	67 =

1 Gr. — 1 Maaß
18 M. — 67 Gr. Fac. $3\frac{13}{18}$ Gr.

133) Man schmelzt 6 Mark 15löthig, 1 Mark 3löthig, 2 Mark Kupfer, 8 Loth 13löthig. Wieviel fein hält eine Mark, nachdem alles untereinander geschmolzen?

	6 Mark	—	15löthig ist	—	90 Loth
	1 =	—	3 = =	—	3 =
	2 =	—	0 = =	—	0 =
	$\frac{1}{2}$ =	—	13 = =	—	$6\frac{1}{2}$ =
Summa	$9\frac{1}{2}$ =		Summa		$99\frac{1}{2}$ =

1 Loth — 1 Mark
$9\frac{1}{2}$ Mark — $99\frac{1}{2}$ Loth. Fac. $10\frac{9}{19}$löt.

oder die Mark hält fein 10 Loth $8\frac{10}{19}$ Grän.

134) Ein Vollmeyer giebt des Jahrs 3 Thaler, ein Halbmeyer $1\frac{1}{2}$ Thaler, ein Bringsitzer 1 Thaler, nun sind 4 Vollmeyer, 5 Halbmeyer 1 Bringsitzer. Wieviel muß eine Person entrichten, wenn einer so viel als der andere geben sollte?

4 à 3

4 à 3 Thl. ist	— 12 Thl.	1 Thl. —	1 Pers.
5 = $1\frac{1}{2}$ =	— $7\frac{1}{2}$ =	10 Pers. —	$20\frac{1}{2}$ Thl.
1 = 1 = =	— 1 =	Fac.	$2\frac{1}{20}$ Thlr.
Sum. 10 Pers.	Sum. $20\frac{1}{2}$ Thlr.		

Folgende Aufgabe ward mir zu berechnen vorgelegt:

135) Man hat 75 Mark Gold; hat die Mark an:

Gold	— 15 Karat	8 Grän	
Silber	— 7 =	2 =	
Kupfer	— 1 =	2 =	

Dieses Stück vermischtes Gold soll blos mit Ducaten und Kupfer beschickt werden, die Ducaten halten, die Mark:

Gold	— 23 Karat	6 Grän
Silber	— — =	6 =

Sollen zu Goldgulden beschickt werden, welche halten, die Mark:

Gold	— 18 Karat	8 Grän	
Silber	— 3 =	0 =	
Kupfer	— 2 =	4 =	

Wieviel Ducaten und Kupfer ist dazu zu nehmen, und wie stark wird die Masse? Eine Mark hat 24 Karat, ein Karat 12 Grän.

Auflösung.

Das Stück Gold hält $15\frac{2}{3}$ ——— $4\frac{1}{3}$

$18\frac{2}{3}$ Goldgülden

Ducaten $23\frac{1}{2}$ ——— 3

Die Vermischung zeigt, daß man, um den Werth des Goldgüldengoldes zu erhalten, zu den gegebenen 75 Mark $46\frac{16}{19}$ Mark von den Ducaten setzen müsse.

Weil wegen des zu vielen Silbers noch mehr Gold zugesetzt werden muß; so wird man die sonst weitläuftige

rige Arbeit sehr vermindern, wenn man statt $46\frac{16}{29}$ Mark Ducaten 47 Mark Ducaten nimmt.

Die gegebenen 75 Mark Gold sollten nach der geforderten Vermischung der Goldgülden enthalten:

Gold	—	$58\frac{1}{3}$ Mark
Silber	—	$9\frac{3}{8}$ =
Kupfer	—	$7\frac{7}{24}$ =
Summa		75 =

Die gegebenen 75 Mark Gold halten:

Gold	—	$48\frac{23}{24}$ Mark
Silber	—	$22\frac{19}{48}$ =
Kupfer	—	$3\frac{31}{48}$ =
Summa		75 =

47 Mark Ducaten halten:

Gold	—	$46\frac{1}{48}$ Mark
Silber	—	$\frac{47}{48}$ =

Beydes zusammen, sowol die 75 Mark Gold, als auch die 47 Mark Ducaten, halten:

Gold	—	$94\frac{47}{48}$ Mark	Summa 122 Mark.
Silber	—	$23\frac{18}{48}$ =	
Kupfer	—	$3\frac{31}{48}$ =	

Nach der gegebenen Vermischung der Goldgülden sollte seyn.

Gold	—	146 Mark
Silber	—	$24\frac{3}{7}$ =
Kupfer	—	$18\frac{1}{4}$ =

Subtrahirt man dasjenige, was man in den gegebenen 75 Mark und den zugesetzten 47 Mark Ducaten hat, von dem, was man darinn haben sollte; so fehlt:

Gold

Gold	—	$51\frac{1}{48}$ Mark
Silber	—	$1\frac{18}{336}$ =
Kupfer	—	$14\frac{29}{48}$ =

Setzt man dis fehlende zu, so hätte man $188\frac{13}{28}$ Mark als die ganze Masse und die geforderte richtige Probe. Weil aber der Zusatz des Goldes Ducaten seyn sollen, welche die Mark 6 Grän Silber halten, so berechne man, wieviel Mark Ducaten $51\frac{1}{48}$ Mark Gold in sich fassen; das gesuchte ist $52\frac{5}{47}$ Mark Ducaten.

In diesen $52\frac{5}{47}$ Mark Ducaten steckt $1\frac{193}{2256}$ Mark Silber. Wenn man mit diesem Silber das fehlende Silber ersetzt; so bleibt über $\frac{13}{256}$ Mark, welches zu viel in der Masse ist; diese $\frac{13}{256}$ Mark Silber wollen wir, um die Richtigkeit besser übersehen zu können, vors erste außer Acht lassen.

Die Rechnung ergiebt, daß wenn die gegebenen 75 Mark Gold der Forderung gemäß versetzt werden, daß alsdenn die ganze Masse bestehen müsse aus:
146 Mark Gold, $24\frac{3}{7}$ Mark Silber, $18\frac{1}{4}$ Mark Kupfer.

In den Tiegel wird gesetzt:	Gold	Silber	Kupfer
75 Mk. geg. } 47 = Duc. }	hält Gd. $94\frac{47}{48}$ Mk.	$23\frac{18}{48}$ Mrk.	$3\frac{31}{48}$ Mrk.
$52\frac{5}{47}$ = Duc.	— $51\frac{1}{48}$ =	$1\frac{193}{2256}$ =	—
$14\frac{29}{48}$ = Kupf.	— —	—	$14\frac{29}{48}$ =
$188\frac{1603}{2256}$ Mrk.	Summ. 146 Mrk. Gold.	$24\frac{3}{7}$ u $\frac{13}{256}$ = Silber.	$18\frac{1}{4}$ = Kupfer.

Die Summe, welche mit obigen bis auf $\frac{13}{256}$ Mark Silber, welche noch zu viel in der Masse sind, überein kömmt, beweiset die Richtigkeit der Rechnung. Diese $\frac{13}{256}$ Mark betragen auf die ganze Masse der 188 Mark noch nicht 6 Grän.

Werden

Werden diese $\frac{13}{6778}$ Mark gehörig mit Gold und Kupfer versetzt; so beträgt der Zusatz Gold $\frac{864}{29681}$ Mark, Kupfer $\frac{91}{57922}$ Mark. Die $\frac{364}{29681}$ Mark Gold sind in Ducaten $\frac{17472}{1391167}$ Mark. Dieser Bruch der Ducaten enthält Silber $\frac{17472}{66800016}$ Mark. Setzt man nun noch $\frac{17473}{1391167}$ Mark Ducaten und $\frac{91}{57922}$ Mark Kupfer zu; so ist nur noch $\frac{17472}{66800016}$ Silber zu viel in der Masse. Diese kleine Unrichtigkeit, welche sich durch eine weiter fortgesetzte Rechnung noch vermindern könnte, beträgt auf die ganze Masse noch keinen halben Grän, folglich auf eine Mark noch nicht den 276ten Theil eines Grans.

IV. Abschnitt.

Mathematische Aufgaben.

§. 214.

Die Fläche eines länglichten Vierecks wird gefunden, wenn man die Länge desselben durch die Breite multiplicirt. Z. E. Die Länge eines viereckten Tisches sey 6 Fuß, die Breite 4 Fuß, so ist die Fläche desselben 24 Quadratfuß. Ein Quadratfuß aber ist eine Fläche, die ein Fuß lang und 1 Fuß breit ist. Die Fläche eines Zimmers, das 3 Ruthen lang und 2 Ruthen breit wäre, würde 6 Quadratruthen groß seyn. Eine jede Fläche bestehet aus Quadratmaaß, eine jede Linie aus Längenmaaß.

In der Kettenregel drückt man die Fläche eines Vierecks dadurch aus, daß man die gegebene Länge und Breite desselben untereinander schreibt. Weil die Länge eines völligen Quadrats der Breite gleich ist, so schreibt man, um die Fläche des Quadrats auszudrücken, die Größe einer Seite zweymal, einmal um die Breite, das andere mal die Länge zu bezeichnen, untereinander.

§. 215.

Beym Berechnen der Flächen und Körper kann sich leicht ein Fehler im Ordnen des Exempels einschleichen. Denn wenn man einen Quadrat- oder Cubicfuß auf die gewöhnliche Art ausdrückt, so kann es zweifelhaft werden, wie oft der Name des Maaßes in der gegenseitigen Columne erscheinen müsse. Die Beobachtung folgender Kleinigkeit, die sehr unbeträchtlich scheint, wird einen jeden sicher stellen, daß er im Berechnen der Flächen und Körper, im Ordnen der Exempel keinen Fehler machen wird. Soll ein Quadrat- oder Cubicfuß ausgedrückt werden; so bezeichne man ihn nicht durch einen kleinen gemalten Viereck oder Würfel; auch lasse man den Namen Fuß nicht für die Länge und Breite zugleich, oder für die Länge, Breite und Dicke zugleich gelten; sondern man bezeichne sowol die Länge als auch die Breite und Dicke, wenn der Gegenstand ein Körper ist, jede besonders mit dem Namen Fuß. Diese wiederholte Benennung sagt, wie oft derselbe Name in der gegenseitigen Columne erscheinen müsse. Durch diese beobachtete Kleinigkeit fällt alle Schwierigkeit weg, welche sich im Berechnen der Flächen und Körper findet.

Ein Morgen hält 120 Quadratruthen, 1 Ruthe hält 16 Fuß, 1 Fuß 12 Zoll, 1 Elle 2 Fuß.

136) Wieviel Quadratfuß hat eine Quadratruthe?

1 F. } — — { 1 R.
F. } { 1 R.

1 R. } — — { 16 F.
1 R. } { 16 F. Fac. 256 Q. Fuß.

137) Es soll in einem Zimmer, dessen eine Seite 18, die andere 12 Ellen lang ist, ein Fußboden gemacht werden; der Quadratfuß ist bedungen zu 3 Groschen; wieviel Thaler wird der Boden kosten?

1 Thlr

1 Thlr. — — { 18 Ell. / 12 Ell.

1 F. } — — 3 Gr.
1 F. }

1 Ell. — — 2 F.

1 Ell. — — 2 F.

36 Gr. — — 1 Thlr. Fac. 72 Thlr.

138) Wieviel Quadratzoll hat eine Quadratruthe?

1 Z. } — — { 1 R. / 1 R.
Z. }

1 R. — — 16 F.

1 R. — — 16 F.

1 F. — — 12 Z.

1 F. — — 12 Z. F. 36864 Zoll.

139) Wieviel Quadratruthen sind 460 Quadratfuß?

Wenn das Maaß der Seiten eines Vierecks angeben ist, so müssen beyde Maaße, nämlich die Länge und Breite, ins Exempel gesetzt werden, weil die Multiplication dieser Seiten durcheinander die Fläche giebt. Ist die Fläche gegeben, so darf man sie nicht 2 mal ausdrücken; denn man hat ja die Fläche schon. Durch zween Buchstaben drückt man diese Fläche immer aus.

1 R. } — — 460 F.
R. }

16 F. — — 1 R.

16 F. — — 1 R. Fac. $1\frac{264}{256}$ Q. Ruthen.

140) Wieviel Morgen sind 4660 Quadratruthen?

1 M. — — 4660 R. / R.

120 R. / R. — — 1 M. Fac. $38\frac{16}{12}$ Morg.

141) Wieviel Quadratruthen sind $\frac{10}{12}$ Morgen?

1 R. } — — $\frac{10}{12}$ Morg.
R. }

1 M. — — 120 R. Fac. 100 Q. Ruthen.

142) Die Länge eines Feldes ist 96 Ruthen, die Breite 24 Ruthen; wieviel Morgen hält das Feld?

1 M. — — { 96 R. / 24 R.

120 R. — — 1 M. Fac. $19\frac{1}{7}$ M.

Es ist zu bemerken, daß ein Viereck, dessen Fläche durch die Multiplication der Breite mit der Länge gefunden wird, durchgehends gleich breit seyn müsse. Läuft ein Feld spitzig zu, so addire man die kleinste und die größeste Breite zusammen, und nehme die Hälfte der Summe als die Breite an; oder man nehme die Mitte des Feldes als die Breite an.

143) Wieviel Quadratfuß sind $9\frac{3}{8}$ Quadratruthen?

1 F. — — $9\frac{3}{8}$ R.
F. — — R.
1 R. — — 16 F.
1 R. — — 16 F. Fac. 2400.

144) Ein Feld, das 24 Ruthen lang, 18 Ruthen breit ist, giebt jährlich 30 Thaler Pacht; wieviel Pacht giebt ein Stück, das 36 Ruthen lang, 14 Ruthen breit ist?

1 Thlr. — — { 36 R. / 14 R.

24 R } — — 30 Thlr. Fac. 35 Thlr.
18 R }

145)

145) Der Morgen giebt an einem Orte 3 Thaler Pacht; ein Feld ist 40 Ruthen lang, 22 Ruthen breit; wieviel Pacht giebt es?

1 Thlr.	—	—	{ 40 R. / 22 R.
1 M.	—	—	3 Thlr.
120 R.	—	—	1 M. Fac. 22 Thlr.

146) Wieviel Ellen $\frac{3}{4}$ breite Leinewand gebraucht man, um eine Wand, die 3 Ruthen lang, $11\frac{1}{2}$ Fuß breit ist, zu bekleiden?

1 Ell. / $\frac{3}{4}$ Ell.	—	—	{ 3 R. / $11\frac{1}{2}$ Fuß
2 F.	—	—	1 Ell.
2 F.	—	—	1 Ell.
1 R.	—	—	16 F. Fac. 184 Ellen.

147) Ein Feld, das 36 Ruthen 6 Fuß lang, 14 Ruthen 4 Fuß breit ist, giebt des Jahrs 15 Thaler Pacht; wieviel Morgen muß ein Feld halten, das 28 Thaler Pacht giebt?

1 M.	—	—	28 Thlr.
15 Thlr.	—	—	{ $36\frac{3}{8}$ R. / $14\frac{1}{4}$ R.
120 R.	—	—	1 M. Fac. $4\frac{101}{320}$ Morgen.

148) Die Wände eines Zimmers betragen 3 Ruthen 2 Fuß Länge und 14 Fuß 6 Zoll Breite, man soll für 1 Quadratfuß 1 Groschen 4 Pfennige zu bemalen geben; wieviel Thaler bekömmt der Maler für das Zimmer?

1 Thlr.	—	—	$\left\{\begin{matrix} 3\frac{1}{8} \text{ R.} \\ 14\frac{1}{2} \text{ Fuß} \end{matrix}\right.$
$\left.\begin{matrix} 1 \text{ F.} \\ 1 \text{ F.} \end{matrix}\right\}$	—	—	$1\frac{1}{2}$ Gr.
1 R.	—	—	16 F.
36 Gr.	—	—	1 Thlr. Fac. $30\frac{5}{24}$ Thlr.

149) Man nähet auf einen Quadratzoll gestickter Arbeit $3\frac{3}{4}$ Stunden; wieviele Wochen wird man auf eine Decke arbeiten, die 8 Fuß lang, $4\frac{1}{2}$ Fuß breit ist, wenn man täglich 7 Stunden arbeitet, und den Sonntag feyert?

1 W.	—	—	$\left\{\begin{matrix} 8 \text{ F.} \\ 4\frac{1}{2} \text{ F.} \end{matrix}\right.$
$\left.\begin{matrix} 1 \text{ Z.} \\ 1 \text{ Z.} \end{matrix}\right\}$	—	—	$3\frac{3}{4}$ St.
6 Tage	—	—	1 Woche
7 Stund.	—	—	1 Tag
1 F.	—	—	12 Z.
1 F.	—	—	12 Z. Fac. $462\frac{6}{7}$ Wochen.

150) Auf einen Morgen gehören 2 Himten Einsaat; wieviel muß in ein Feld gestreuet werden, das 13 Ruthen 8 Fuß lang, 9 Ruthen breit ist?

1 Himt.	—	—	$\left\{\begin{matrix} 13\frac{1}{2} \text{ R.} \\ 9 \text{ R.} \end{matrix}\right.$
1 M.	—	—	2 H.
120 R.	—	—	1 M. Fac. $2\frac{1}{20}$ Himt.

151) Ein Feld, das 24 Ruthen lang, 15 Ruthen breit ist, bringt des Jahrs 12 Thaler ein, wenn der Himten Weizen für 1 Thaler verkauft wird; wieviel bringt ein Feld ein, das 27 Ruthen lang, 12 Ruthen breit ist, wenn der Himten 1 Thaler 8 Groschen gilt?

1 Thlr.

1 Thlr.	—	—	{ 27 R. / 12 R. / $1\frac{2}{9}$ Thlr.
24 R. / 15 R. / 1 Thlr.	—	—	12 Thlr. Fac. $13\frac{1}{5}$ Thlr.

152) Die Wände eines Zimmers betragen mit einander 10 Ruthen in der Länge, 2 Ruthen in der Breite. Diese Wände sollen mit einer Tapete beschlagen werden, von welcher der Quadratzoll 4 Pfennige bedungen ist; wie hoch wird die Tapete kommen?

1 Thlr.	—	—	{ 10 R. / 2 R.
1 Z. / 1 Z.	—	—	4 Pf.
1 R.	—	—	16 F.
1 R.	—	—	16 F.
1 F.	—	—	12 Z.
1 F.	—	—	12 Z.
36 Gr.	—	—	1 Thlr.
8 Pf.	—	—	1 Gr. Fac. 10240 Thlr.

153) Ein Brett von Brasilienholze, das 2 Fuß lang, 1 Fuß breit ist, kostet 6 Thaler; wieviel kostet der Quadratzoll?

1 Pf.	—	—	{ 1 Z. / 1 Z.
2 F. / 1 F.	—	—	6 Thlr.
12 Z.	—	—	1 F.
12 Z.	—	—	1 F.
1 Thlr.	—	—	36 Gr.
1 Gr.	—	—	8 Pf. Fac. 6 Pf.

154) Auf einer Wiese, die 16 Ruthen lang, 10 Ruthen breit ist, wächst 6 Centner Heu; wieviel Quentgen wächst auf einen Quadratfuß?

1 Qtg.	—	—	1 F. / 1 F.
16 R. / 10 R.	—	—	6 Centner
16 F. / 16 F.	—	—	1 R. / 1 R.
1 Centn.	—	—	100 Pfund
1 Pf.	—	—	32 Loth
1 Loth	—	—	4 Quentg. Fac. $1\frac{7}{8}$ Qtg.

155) Es soll ein Feld, das die 10te Garbe geben muß, und 45 Ruthen lang und 30 Ruthen breit ist, in guten Gulden, an den Meistbietenden verpachtet werden; ein Morgen Land von gleicher Güte, der zehentfrey ist, kann aufs höchste 3 Thaler in Golde Pacht geben, wenn nämlich der Himten Rocken 30 Groschen Cassengeld gilt, jetzt aber kostet der Himten nur 24 Gr. Gold; wieviel kann ich aufs höchste auf obiges Stück in guten Gulden bieten? 110 Gold ist 100 in Gulden.

1 Thlr. in Gulden	—	45 R. / 30 R. / 24 Gr. Gold der Himt.
1 Morgen / 30 Gr. Essg.	—	3 Thlr. Gld.
110 Thlr. in Golde	—	100 in Gulden
15 Gold	—	14 Essg.
120 R. / R.	—	1 Morg.
10 Garben	—	9 Garb. Fac. $20\frac{14}{15}$ Thlr.

Länge und Breite macht eine Fläche; Länge, Breite und Dicke einen Körper aus. Wenn man die Länge

ge eines viereckten Körpers mit der Breite und das Produkt mit der Dicke multiplicirt; so erhält man den Innhalt des Körpers. Ein Cubus oder Würfel ist ein Körper, dessen Länge, Breite und Dicke, einander gleich ist.

Es mag ein Ziegelstein 8 Zoll lang, 4 Zoll breit, 2 Zoll dick seyn. Multiplicirt man die Länge durch die Breite; so erhält man 32 Quadratzoll, als die Fläche der größesten Seite. Wird diese Fläche durch die Dicke multiplicirt; so bekömmt man in 64 Cubiczollen den körperlichen Innhalt des Steins; das ist in solchen Zollen, deren jeder 1 Zoll lang, 1 Zoll breit und 1 Zoll dick ist.

In der Kettenregel drückt man Cubiemaaß durch drey Buchstaben aus.

156) Wieviel Cubicfuß hat eine Cubicruthe?

1 F.		1 R.
1 F.	— —	1 R.
1 F.		1 R.
1 R.		16 F.
1 R.	— —	16 F.
1 R.		16 F. Fac. 4096 Cubicfuß.

157) Wieviel Cubiczoll hat eine Cubicruthe?

1 Z.		1 R.
1 Z.	— —	1 R.
1 Z.		1 R.
1 R.		16 F.
1 R.	— —	16 F.
1 R.		16 F.
1 F.		12 Z.
1 F.	— —	12 Z.
1 F.		12 Z. Fac. 7077888.

158) Eine Braupfanne, die 8 Fuß lang, 6 Fuß breit, 7 Fuß hoch ist, fasset 216 Eimer; wieviel Eimer fasset eine Pfanne, die 6 Fuß lang, 5 Fuß breit, 4 Fuß hoch ist?

1 Eimer — — { 6 F. / 5 F. / 4 F.

8 F. / 6 F. / 7 F. — — 216 Eimer. F. 77$\frac{1}{7}$ Eim.

159) In einem Wasserbehältnisse, das 6 Ruthen lang, . Ruthen breit, 3 Ruthen hoch ist, gehen 96620 Eimer; wieviel gehen in eine Pfanne, die 8 Fuß lang, 4 Fuß breit, 3 Fuß hoch ist?

1 Eimer — — { 8 F. / 4 F. / 3 F.

6 R. / 4 R. / 3 R. — — 96620 Eimer

16 F. / 16 F. / 16 F. — — { 1 R. / 1 R. / 1 R. Fac. 31$\frac{347}{786}$ Eimer.

160) Der Cubiczoll Ebenholz ist bedungen zu 1 Groschen; wieviel Thaler kostet ein Balken, der 4 Fuß lang, 8 Zoll breit, 6 Zoll dick ist?

1 Thlr. — — { 4 F. / 8 Zoll / 6 Zoll

1 Kubikzoll / 1 Kubikzoll / 1 Kubikzoll — — 1 Gr.

1 F. — — 12 Z.

36 Gr. — — 1 Thlr. Fac. 64 Thlr.

161)

161) Ein Balken, der 2 Fuß lang, 4 Zoll breit, 3 Zoll dick ist, wiegt 9 Pfund; wieviel wiegt ein Stück, das 7 Zoll lang, 3 Zoll breit, $1\frac{1}{2}$ Zoll dick ist.

1 Pf. — — { 7 Z. / 3 Z. / $1\frac{1}{2}$ Z.

2 F. / 4 Z. / 3 Z. } — — 9 Pf.

12 Z. — — 1 F. Fac. $\frac{63}{64}$ Pfund.

162) Man will eine Mauer aufführen lassen, die 8 Ruthen lang, 10 Fuß 4 Zoll hoch und 11 Zoll dick seyn soll; wieviel Ziegel müssen zu dieser Mauer angeschafft werden, da Ein Stein 8 Zoll lang, 4 Zoll breit, 3 Zoll dick ist?

1 Ziegel / 8 Zoll / 4 Zoll / 3 Zoll } — — { 8 R. / $10\frac{1}{3}$ F. / 11 Zoll.

1 R. — — 16 F.

1 F. — — 12 Z.

1 F. — — 12 Z. Fac. 21824 Ziegel.

163) Es soll eine Mauer, die 20 Ruthen lang, 2 Fuß hoch, 10 Zoll dick ist, gemacht werden, der Cubicfuß ist bedungen für 4 Groschen; wie theuer wird die Mauer kommen?

1 Thlr. — — { 20 R. / 2 F. / 10 Z.

1 F. / 1 F. / 1 F. } — — 4 Gr.

1 R. — — 16 F.

12 Zoll — — 1 F.

36 Gr. — — 1 Thlr. Fac. $59\frac{7}{9}$ Thlr.

Man hat noch kein ganz richtiges Verhältniß zwischen dem Durchmesser (Diameter) und dem Umkreise (Peripherie) eines Zirkels gefunden. Es ist aber dis Verhältniß durch so große Zahlen bestimmt, daß die Unrichtigkeit für nichts zu achten ist. Nimmt man den Durchmesser eines Zirkels 100 und den Umkreis 314 an; so hat man ein Verhältniß, das im gemeinen Leben hinlänglich ist. Das kleinste Verhältniß, welches durch ganze Zahlen ausgedrückt werden kann, ist, wenn dem Durchmesser 7, dem Umkreise 22 gegeben wird. Dieses Verhältniß ist aber etwas weniger als das vorerwehnte richtig.

164) Der Umkreis des runden Beckens eines Springbrunnens ist 300 Ellen, wie groß ist der Durchmesser?

1 Ell. Durchm. — 300 Ell. Umkreis
314 Umkr. — 100 Durchm. Fac. $95\frac{170}{314}$ Ell.

165) Ein Faß ist 8 Fuß 4 Zoll im Durchmesser, wie groß muß das Band seyn, das dieses Faß umgiebt?

1 F. Umkr. — — $8\frac{1}{3}$ F. Durchm.
100 Durchm. — — 314 Umkr. Fac. $26\frac{1}{6}$ Fuß.

Der Innhalt oder die Fläche eines Zirkels wird gefunden, wenn man den Umkreis desselben durch den vierten Theil des Diameters multiplicirt.

166) Wie groß ist die Fläche eines Zirkels, dessen Durchmesser 5 Fuß ist?

Man suche erst den Umkreis. Diesen gefundenen Umkreis multiplicire man durch den vierten Theil von 5, welcher ist $\frac{5}{4}$.

1 Umkr. — 5 F. Durchm. | Der Umkr. ist $\frac{157}{10}$ F.
100 Durchm. 314 Umkr. | $\frac{157}{10}$ mal $\frac{5}{4}$ F. 19 $\frac{5}{8}$ Zoll.

Wie sich der kurze Theil eines Hebels, zum langen Theile verhält; so verhält sich die Kraft, welche am

langen

kangen Ende angewandt wird, zur Last, welche das kurze Ende heben soll.

167) 940 Pfund sollen durch 82 Pfund Kraft gehoben werden; wie lang muß der lange Arm eines Hebels seyn, da der kurze 2 Fuß lang ist?

1 Fuß — — 940 Pfund
82 Pfund — — 2 Fuß Fac. $22\frac{38}{41}$ Fuß.

168) Der lange Arm eines Hebels ist 14 Fuß lang; wie lang muß der kurze Arm seyn, damit durch 110 Pfund Kraft 2300 Pfund Last gehoben werde?

Je kürzer der Arm ist, desto mehr Gewicht hebt er,

1 Fuß — 110 Pfund
2300 Pfund — 14 Fuß Fac. $\frac{154}{230}$ Fuß oder 8_{115}^{4} Zoll

169) Wieviel Pfund Last, kann durch 84 Pfund Kraft, durch einen Hebel gehoben werden, dessen langer Arm $13\frac{1}{2}$ Elle, dessen kurzer Arm $\frac{1}{2}$ Elle lang ist?

1 Pfund Last — — 84 Pf. Kraft
$\frac{1}{2}$ Elle — — $13\frac{1}{2}$ Elle Fac. 2268 Pfund.

170) Man will von einer Welle die 1 Fuß 6 Zoll dick ist, eine Winde machen lassen; wie groß muß der Durchmesser des Rades an dieser Welle seyn, damit durch 150 Pfund Kraft 2000 Pfund aufgewunden werden können? Die halbe Dicke der Welle, ist dem kurzen Arme, der halbe Durchmesser des Rades, dem langen Arme eines Hebels gleich.

1 Fuß — — 2000 Pfund Last
150 Pf. Kraft — — 9 Zoll
12 Zoll — — 1 Fuß Fac. 10 Fuß halber Durchmesser des Rades.

Bey den Exempeln vom Hebel ist zu merken, daß man etwas mehr Kraft anwenden muß, wenn die Last würklich

würklich gehoben werden soll, als in den Exempeln angegeben ist, weil die berechnete Kraft die Last nur im Gleichgewichte erhält.

Die scheinbare Größe des Diameters einer Scheibe, oder der Seite eines Quadrats, nimmt nach der Verhältnis ab oder zu, nach welcher man den Gegenstand weiter vom Auge entfernet, oder dem Auge näher bringt. Z. E. ein viereckтes Brett sey zwo Ruthen vom Auge entfernt; man nenne die Größe, in welcher die Seiten erscheinen, Eins. Man bringe das Brett in die Entfernung einer Ruthe vom Auge; so wird jede Seite noch einmal so groß, oder zwey, folglich die Fläche viermal so groß erscheinen. Man entferne es vier Ruthen vom Auge, so wird jede Seite halb so groß, folglich die Fläche nur den vierten Theil so groß, als in der Entfernung von zwo Ruthen erscheinen.

Setzt man nun in der Stelle des Auges ein brennendes Licht, so wird in der Entfernung von einer Ruthe viermal so viel Licht, und in der Entfernung von vier Ruthen der vierte Theil von dem Lichte auf die Fläche fallen, als in der Entfernung von zwo Ruthen darauf fiel. Folglich nimmt das Licht, welches eine Fläche erleuchtet, nach den Quadraten der Entfernung vom Lichte ab oder zu.

171) Man entferne ein Papier 3mal so weit von einer brennenden Kerze, wie stark wird in dieser Entfernung das Papier erleuchtet, da man die erste Entfernung 1 nennet?

1 Licht
3 } — — { 1
3 } — — { 1 Facit $\frac{1}{9}$

172) Wieviel schwächer ist das Sonnenlicht auf dem Saturn, gegen das Sonnenlicht auf der Erde?

Saturn

Saturn ist 95 von der Sonne, wenn die Entfernung der Erde von der Sonne 10 ist.

$$\left.\begin{matrix}\text{I} & 95\\ & 95\end{matrix}\right\} \text{— —} \left\{\begin{matrix}10\\10\end{matrix}\right. \text{Fac. } 90\tfrac{1}{4} \text{ mal schwächer.}$$

173) Wieviel stärker ist das Sonnenlicht auf dem Merkur gegen das Sonnenlicht auf der Erde, da der Merkur 4, die Erde 10 von der Sonne ist?

$$\left.\begin{matrix}\text{I} & 4\\ & 4\end{matrix}\right\} \text{— —} \left\{\begin{matrix}10\\10\end{matrix}\right. \text{Fac. } 6\tfrac{1}{4} \text{ mal so stark.}$$

Man darf nur, wenn die verschiedenen Erleuchtungen, verschiedentlich vom Lichte entfernter Flächen, gefunden werden sollen, beyde Entfernungen quadriren, das ist mit sich selbst multipliciren, alsdann das gröſseste Quadrat durchs kleinste dividiren. Der Quotient sagt, wieviel stärker die Fläche, welche dem Lichte am nächsten ist, vor der Entfernetern erleuchtet wird. Z. E. ein Papier sey 3 Zoll vom Lichte, ein anders 5 Zoll. Das Quadrat von 3 ist 9, von 5 ist das Quadrat 25. Es hat also das nächste Papier $2\frac{5}{9}$ oder $2\frac{7}{9}$ mal mehr Licht als das entferntere Papier.

Ich habe zum voraus seţen können, daß der Leser die wenigen Regeln, welche in dem Abschnitte vom Ordnen der Aufgaben vorgetragen sind, beym Ordnen der gegebenen Exempel anwenden werde. Ist dieses geschehen, so wird man bey keinem Falle Schwierigkeiten gefunden haben. Z. E. in der 172 und 173sten Aufgabe, war keine andere als die 5te Regel anzuwenden. Weil der Saturn weiter als die Erde von der Sonne entfernt ist; so muß das Sonnenlicht auf demselben schwächer als 10 seyn. Da nun das Facit kleiner werden sollte, so mußte das größeste Quadrat in die Theilcolumne gebracht werden. Hingegen weil die größere Nähe des Merkurs zur Sonne verursacht, daß

mehr

mehr Licht auf dem Merkur als auf die Erde fällt; so muß hier das größeste Quadrat in die Multiplications- das kleinste aber in die Theilcolumne gebracht werden. Man erhielte beym Saturn $\frac{100}{9025}$, beym Merkur $\frac{100}{16}$ zum Facitte.

Zehntes Kapitel.

I. Abschnitt.

Von Zins auf Zinsrechnung.

§. 216.

Ein gegebenes Capital ist auf gewisse Procente zinsbar belegt. Es soll nicht allein das Capital verzinset, sondern es sollen auch Zinsen auf Zinsen berechnet werden; wie groß wird das Capital mit den Zinsen und Zinszinsen in gegebenen Jahren wachsen? oder dasselbe in einem bestimmten Falle ausgedrückt. Einer leihet dem andern 300 Thlr. auf 10 Jahre, der Debitor soll alsdann vermöge des getroffenen Accords, die Zinsen aller Jahre, sammt dem Capitale bezahlen. Weil er nun die Zinsen selbst nutzt, so soll er die Zinsen alle Jahre zum Capital schlagen, und solche mit verzinsen; wieviel wird der Debitor nach 10 Jahren für die geliehenen 300 Thlr. wieder bezahlen müssen? und wie ist dieses zu berechnen?

§. 217.

Wenn man eine Regel finden will, wie eine Rechnung, die auf gleiche Art durch viele Glieder fortgesetzt werden muß, am vortheilhaftesten verrichtet werden könne; so drücke man den Fall in bequemen Zahlen aus, und berechne solche auf die gewöhnliche Art, ein paar Glieder durch. Man verrichte aber die Rechnungs-

nungsarten, welche angewandt werden müssen, nicht würklich, sondern deute sie nur durch Zeichen an. Diese Zeichen zeigen, was man gethan habe, und was man in ähnlichen Fällen thun müsse. Die Vortheile, welche etwa angewandt werden können, bieten sich uns selbst dar.

Wir wollen 1 Thlr. zum Capitale wählen. Die Ursache dieser Wahl ist, weil das kleinste Capital so gut die Regel, als ein größeres giebt; und hat man gefunden, wie groß 1 Thlr. in bestimmten Jahren durch Zinsen und Zinszinsen angewachsen ist; so kann man die Größe eines jeden also aufgewachsenen Capitals, durch eine bloße Multiplication des geforderten Capitals, in das gefundene Capital des einen Thalers, finden.

Es sey das Capital 1 Thlr. die Zinse von hundert sey 5.

Um nun die Regel zu finden, rechne man durch die Kettenregel aus, wie 1 Thlr. nach 1 Jahre durch die Zinsen wachse.

1 Cap. Zinse — — 1 Capit.
100 Capit. — — 105 Cap. Zinse Fac. $\frac{105}{100}$

Sucht man weiter durch die Kettenregel, zu welcher Größe das Capital mit den einjährigen Zinsen, durch die Zinsen des 2ten Jahrs aufwachse; so erhält man im Facitte die Größe des Capitals, zu welcher es durch die Zinsen des ersten und zweyten Jahrs, und die Zinszinsen des ersten Jahrs anwächst.

1 Cap. Zinse — — $\frac{105}{100}$ Capit.
100 Capit. — — 105 Cap. Zinse.

Wirft man wie immer geschehen muß, den Nenner 100 in die gegenseitige Columne, so ist das Facit $\frac{105}{100}$ mal $\frac{105}{100}$ oder $\frac{105}{100}^2$. Man sucht ferner auf gleiche Art die Größe des Capitals nach dem dritten Jahre.

1 Cap. Zinse — $\frac{105}{100}^2$ Cap.
100 Capit. — 105 Cap. Zinse Fac. $\frac{105}{100} \cdot \frac{105}{100} \cdot \frac{105}{100}$ oder $\frac{105}{100}^3$

Man sieht leicht, daß das Capital nach dem 4ten Jahre $\frac{105}{100}^4$ nach dem 8ten Jahre $\frac{105}{100}^8$ seyn werde.

§. 218.

Die hierdurch gefundene Regel ist also, wenn man sie mit Worten ausdrückt: Um die Größe des Capitals von 1 Thlr. nach gegebenen Jahren zu finden, addire man die Zinsen eines Jahrs zu 100, ist Summe 105, diese Summe ist der Zehler eines Bruchs, dessen Nenner 100 ist, nämlich $\frac{105}{100}$. Diesen Bruch erhebe man zu derjenigen Potenz, welche der Anzahl der Jahre gleich ist. Z. E. man soll finden, wie groß das Capital eines Thalers nach 10 Jahren angewachsen sey, wenn das Capital zu 4 von 100 belegt, und die Zinsen nebst den Zinszinsen zum Capital geschlagen werden?

Man mache den Bruch $\frac{104}{100}$, multiplicire solchen durch sich selbst, so hat man $\frac{10816}{10000}$. welches die zwote Potenz, und die Größe des Capitals nach 2 Jahren ist. Diesen Bruch abermal durch $\frac{104}{100}$ multiplicirt, ist die dritte Potenz nämlich $\frac{1124864}{100000}$ als die Größe des Capitals nach 3 Jahren. Diesen Bruch noch einmal durch $\frac{104}{100}$ multiplicirt, giebt die vierte Potenz, und das gesuchte Capital nach 4 Jahren, u. s. w.

Weil

Weil der Bruch $\frac{104}{100}$ schon ein Decimalbruch ist, so ist es überflüßig, den Nenner auszudrücken, wenn man nur im Zehler so viele Decimalstellen abschneidet, als der Nenner Nullen hat. Der Decimalbruch ist also 1, 04, diesen Bruch durch wiederholte Multiplication zur fünften Potenz erhoben, giebt folgende Tabelle, welche den Wachsthum eines Thalers durch Zinsen und Zinszinsen zu 4 Procent in 5 Jahren zeigt.

Capital	—	—	1 Thlr.
1 Jahr	—	—	1, 04
2 »	—	—	1, 0816
3 »	—	—	1, 124864
4 »	—	—	1, 16985856
5 »	—	—	1, 2166529024

Den Werth dieser Brüche, und wo das Comma seinen Platz erhalte, weis man schon aus dem Kapitel von den Decimalbrüchen.

Will man aus dieser Tabelle den Werth eines Capitals von 10, 100, 1000 u. s. w. Thlr. nach einer gegebenen Anzahl Jahren finden; so darf man nur das Comma um 1, 2, oder 3 Nullen zurück setzen. Z. E. man verlangt zu wissen, wie groß ein Capital von 100 Thalern in 3 Jahren, durch die Zinsen und Zinszinsen sey. Das Comma des dritten Jahrs, rückt man deswegen um zwo Stellen zurück, weil 100 zwo Nullen hat. 112, 4864 ist das Facit.

Streicht man in der Tabelle das Comma weg, und siehet die Decimalziffern als ganze Ziffern an; so erhält man die Größe eines, durch Zinsen und Zinszins gewachsenen Capitals, welches so groß ist, als der Nenner in dem beystehenden Jahre der Tabelle. Z. E. wie groß ist 10000 Thlr. in zwey Jahren gewachsen? Antw. 10816 Thlr.

§. 119.

Um zu finden, zu welcher Größe ein jedes gegebenes Capital, nach bestimmten Jahren, durch die Zinsen und Zinszinsen wachsen werde, darf man nur die Zahl des bestimmten Jahrs der Tabelle, durchs Capital multipliciren, und dem Comma, nach den Regeln der Decimalbrüche, seinen Platz ertheilen. Z. E. wie groß wird 341 Thlr. in 3 Jahren, durch die Zinsen und Zinszinsen gewachsen seyn, wenn 4 von 100 Zinse gerechnet wird? Antw. 383, 578614 Thlr.

§. 220.

Verlangt man die Größe eines Capitals, welches in gegebenen Jahren blos durch die Zinsen, nicht durch Zinszinsen wachse; so darf man nur durch die Kettenregel berechnen, wie hoch sich die Zinsen in den gegebenen Jahren belauffen, und solche zum Capitale addiren. Z. E. ein Vormund stecket 700 Thlr. von dem Vermögen seines Pupillen in seinen Handel, nach 6 Jahren bezahlt der Vormund das Capital sammt den 6jährigen Zinsen zu 5 Procent; wieviel muß er wieder bezahlen?

1 Thlr. Zinse — — { 700 Cap / 6 Jahre.

100 Capital / 1 Jahr } — — 5 Zinse F. 210 Th. Zinse

Der Vormund bezahlt also 210 Thlr. Zinse, und 700 Thlr. Capital, überhaupt 910 Thlr. Capital und Zinse.

II. Abschnitt.

Von der Berechnung des Interusurium.

§. 221.

Interusurium ist der Rabat oder Abzug, um welchen eine Forderung, die vor der Bezahlungszeit entrichtet werden soll, vermindert wird.

In einem Testamente wird einem Bruder 169 Thlr. vermacht, doch so, daß er mit diesem Capitale, ohne Zinsen davon zu geben, nur 30 Jahre handeln soll; nach dem 30sten Jahre soll seine Schwester die 169 Thlr. baar von dem Bruder empfangen, dies ist ihr Erbtheil. Der Bruder will die 169 Thlr. solchermaaßen gleich entrichten, daß weder er noch sie, Schaden dabey haben; wie groß wird der gegenwärtige Werth des Capitals seyn? Weil die Schwester, welche das Geld 30 Jahre früher empfängt, die Zinsen, die der Bruder genießen sollte, 30 Jahre genießet; so müssen nach der Billigkeit, diese Zinsen sogleich vom Capitale abgezogen werden. Weil aber die Schwester auch die Zinsen der Zinsen zu ihrem Nutzen verwendet, so wird beliebt, daß auch die Zinsen der Zinsen vom Capitale sogleich abgezogen werden sollen. Wieviel muß der Bruder, statt 169 Thlr. welche er erst nach 30 Jahren zu bezahlen schuldig wäre, sogleich entrichten?

Er muß ein Capital bezahlen, welches, wenn es sogleich zinsbar belegt, und die Zinsen immer zum Capital geschlagen würden, nach 30 Jahren mit den Zinsen und Zinszinsen, gerade 169 Thlr. seyn würde. Nun hätte weder der Bruder noch die Schwester Schaden durch die frühere Bezahlung. Wie ist die Größe dieses Capitals zu berechnen?

§. 222.

Bey der Zins auf Zinsrechnung steigt man über das Capital hinauf, so daß dasselbe im ersten Jahre einen Zuwachs blos der Zinsen, in den folgenden Jahren der Zinsen und Zinszinsen erhält. Bey der Interusurienrechnung steigt man unter das gegebene Capital herunter, es nimmt in gleicher Verhältnis ab, wie es durch die Zins auf Zinsrechnung zunimmt. Man erreicht aber nie den Punkt, in welchen das Capital gänzlich erschöpft ist. Denn man soll ein Capital finden, welches in gegebenen Jahren mit den Zinsen und Zinszinsen einem andern Capitale gleich sey, folglich muß, man vermindere das Capital durch so viele Jahre als man wolle, immer etwas überbleiben, das Zinse bringet. Es muß ein Reis überbleiben, aus welchem ein Baum erwachsen kann.

§. 223.

Man könnte, um eine Regel zu finden, wie die Größe des verlangten Capitals zu bestimmen sey, nur so schließen: Da 1 Thlr. Capital, welcher zu 4 Procent stehet, durch die Zinsen und Zinszinsen, in gegebenen Jahren, der Sache gemäß heran wächst, wenn man den Bruch $\frac{104}{100}$ zu derjenigen Potenz erhebt, welche den gegebenen Jahren gleich ist; durch die Berechnung des Interusuriums aber, das Capital des einen Thalers eben so abnehmen soll, wie es durch die Zins auf Zinsrechnung zunimmt; so muß das geforderte erfolgen, wenn man den Bruch $\frac{104}{100}$ umkehrt, und $\frac{100}{104}$ zu derjenigen Potenz erhebt, welche den gegebenen Jahren gleich ist.

§. 224.

Man kann sich auch, um diese Regel zu finden, der Kettenregel bedienen. Das Capital, zu welchem ein

gesuchs

gesuchtes Capital, durch Zinsen und Zinszinsen in gegebenen Jahren heran wachsen soll, sey 1 Thlr. die Zinse von 100 sey 4. Bey der Berechnung der Zinsen auf Zinsen nahm man 1 Thlr. als dasjenige Capital an, welches durch die Zinsen und Zinszinsen wachsen sollte. Daher war der Satz

1 Cap. Zinse — — 1 Capit.
100 Capit. — — 104 Cap. Zinse. Fac. $\frac{104}{100}$

Bey der Berechnung des Interusuriums, nimmt man 1 Thlr. als das durch die Zinsen und Zinszinsen bereits erhöhete Capital an, und sucht daraus, das durch die Zinsen verminderte Capital; daher ist der Satz

1 Capital — — = Cap. Zinse
104 Cap. Zinse — — 100 Cap. Fac. $\frac{100}{104}$

Setzt man die Rechnung durch einige Jahre fort, so erhält man die Facitte.

1 Jahr — — $\frac{100}{104}$
2 Jahr — — $\frac{100}{104}^2$
3 Jahr — — $\frac{100}{104}^3$

Diese Facitte geben die Regel: Soll 1 Thlr. durch Zinsen und Zinszinsen gegebene Jahre durch, vermindert werden; so erhebe man, wenn 4 Procent gerechnet werden, den Bruch $\frac{100}{104}$ zu derjenigen Potenz, welche den Jahren gleich ist.

Macht man die Potenzen würklich; so entstehet folgende Tabelle aus dem Capital von 1 Thlr. welche ich nur durch 5 Jahre fortsetzen will.

1	Jahr	—	—	$\frac{100}{104}$
2	=	—	—	$\frac{10000}{10816}$
3	=	—	—	$\frac{1000000}{1124864}$
4	=	—	—	$\frac{100000000}{116985856}$
5	=	—	—	$\frac{10000000000}{1216652902}$

Wollte man also nach dieser Tabelle bestimmen, um wieviel 120 Thlr. auf 5 Jahr zu 5 Procent gerechnet, vermindert werden könnten; so würde der Ansatz zur Rechnung dieser seyn:

1 Capit.	—	—	120 Thlr. Cap. und Zinse
1 Cap. u. Z.	—	—	$\frac{10000000000}{12166529024}$ Thlr. Cap.

Sollte nun die Größe des Capitals in §. 221. würklich bestimmt werden, welches der Bruder seiner Schwester sogleich entrichten will, da er ihr erst nach 30 Jahren 169 Thlr. schuldig wird, und 5 von 100 Zinse gerechnet werden soll; so berechne man gezeigtermaaßen eine Tabelle, in welcher der verminderte Werth eines Thalers 30 Jahr durch bestimmt ist, das ist, man erhebe den Bruch $\frac{100}{105}$ zur 30sten Potenz. In dieser 30sten Potenz hat man den verminderten Werth eines Thalers. Um nun den verminderten Werth von 169 Thlr. zu erhalten, multiplicire man den Zehler der 30sten Potenz durchs Capital 169; dividire das Produkt durch den Nenner, der Quotient ist der verminderte Werth von 169 Thlr.

Wenn man das verminderte Capital genau verlanget; so läßt sich die Rechnung mit Decimalbrüchen hier deswegen nicht anwenden, weil sich $\frac{100}{105}$ nicht genau in einem Decimalbruch ausdrücken läßt.

§. 225.

Sucht man die Größe eines Capitals; welches in gegebenen Jahren nach Abzug blos der Zinsen, nicht

der Zinszinsen, einem gegebenen Capitale gleich sey; oder, dieses in einem bestimmtern Falle ausgedrückt: Sucht man die Größe eines Capitals, welches, wenn es zu 4 Procent belegt wird, in 6 Jahren mit den 6 jährigen Zinsen 250 Thlr. macht; so multiplicire man dasjenige Capital, zu welchen das gesuchte Capital durch die Zinsen hinauf wachsen soll, durch einen Bruch, dessen Zehler anzeigt, wie oft die Zinsen von hundert, in hundert stecken. Z. E. stehet das Capital zu 4 von hundert, so ist der Zehler 25, weil vier 25mal in 100 steckt, dessen Nenner dem Zehler sammt der Zahl der Jahre gleich ist.

Man erhält nach der Vorschrift die Tabellen der Brüche, nach verschiedenen Procenten, durch welche ein gegebenes Capital multiplicirt werden muß.

	4 von 100	5 von 100	6 von 100
1 Jahr	$\frac{25}{26}$	$\frac{20}{21}$	$\frac{16\frac{2}{3}}{17\frac{2}{3}}$
2 Jahr	$\frac{25}{27}$	$\frac{20}{22}$	$\frac{16\frac{2}{3}}{18\frac{2}{3}}$
3 Jahr	$\frac{25}{28}$	$\frac{20}{23}$	$\frac{16\frac{2}{3}}{19\frac{2}{3}}$
4 Jahr	$\frac{25}{29}$	$\frac{20}{24}$	$\frac{16\frac{2}{3}}{20\frac{2}{3}}$
5 Jahr	$\frac{25}{30}$	$\frac{20}{25}$	$\frac{16\frac{2}{3}}{21\frac{2}{3}}$
100 Jahr	$\frac{25}{125}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{16\frac{2}{3}}{116\frac{2}{3}}$

Weil ein jeder Neñer seinen Zehler dividirt, so ist der gebrochene Bruch $\frac{16\frac{2}{2}}{17\frac{2}{3}}$ nichts anders als $16\frac{2}{3}$ dividirt durch $17\frac{2}{3}$.

Eine Familie wird der andern nach 100 Jahren 110 Thlr. schuldig, sie vereinigen sich dahin, daß um die künftige Schuld zu tilgen, ein solches Capital sogleich ausgezahlet werden solle, welches mit den 100 jährigen Zinsen zu 4 Procent 110 Thlr. ausmacht; wieviel muß sogleich bezahlt werden? Antwort $\frac{25}{125}$ mal 110 Thlr. oder 22 Thlr.

Um die Probe zu machen, rechne man durch die Kettenregel aus, wieviel Zinsen 22 Thlr. in 100 Jahren bringen; wenn 100 Thlr. in 1 Jahre 4 Zinse geben. Addirt man zu 88 Thlr. als den gefundenen Zinsen, das Capital 22 Thlr. so erhält man die 110 Thlr. wieder.

Wie leicht die Größe eines Capitals, das durch gegebene Zinsen von hundert, in gegebenen Jahren, einem gegebenen Capitale gleich ist, durch die Algebra gefunden werden könne, zeigt das 96ste Exempel der Algebra.

Eilftes Kapitel.

Von den Rechnungen mit vermischten Größen.

§. 226.

Wie Größen von ungleicher Art, wenn solche verschiedene Posten ausmachen, z. E. verschiedene Capitale, die auf ungleich hohe Zinsen, verschiedene Zeiten hindurch belegt sind; eine verschiedene Anzahl Menschen, die für ungleichen Tagelohn, verschiedene Zeiten arbeiten; wie mancherley Geldsorten von ungleichem Werthe, mancherley Waaren von verschiedenen Preisen, eine gegebene Anzahl ungleich großer Flächen oder Körper, auf einmal berechnet; wie verschiedene Verbind-

Verbindlichkeiten, welche sich Personen wechselsweise schuldig sind, gleich gemacht; die Werthe ungleich theurer Dinge nach ihrer Vermischung bestimmt werden, u. dergl ist der Gegenstand dieses Kapitels.

§. 227.

Um solche Aufgaben, die verschiedene Dinge, und zwar in verschiedenen Posten enthalten, berechnen zu können, ist es nothwendig, daß der Werth dieser verschiedenen Dinge in eine einzige Größe gebracht werde. Dieses geschiehet durch die Multiplication aller Glieder eines jeden Postens durch einander. Z. E. man hat einen Balken der 4 Fuß lang, 3 Fuß breit, 2 Fuß dick ist. Um den Werth dieser drey Glieder in eins zu bringen, werden sie durch einander multiplicirt. Das Produkt 24 Fuß ist der Inhalt des ganzen Balkens. Weil man aber diese 24 Fuß als die Länge, oder Breite, oder als die Dicke ansehen kann; so sagt das Produkt, ein Stück Holz ins gevierte das 24 Fuß lang, 1 Fuß breit, 1 Fuß dick ist, oder das 24 Fuß breit, 1 Fuß lang, 1 Fuß dick ist, oder das 24 Fuß dick, 1 Fuß lang, 1 Fuß breit ist, fasset so viel Holz in sich, als ein Balken der 4 Fuß lang, 3 Fuß breit und 2 Fuß dick ist.

Lang 4 Fuß, breit 3 Fuß, dick 2 Fuß, = 24 Prod.

Denn es ist gleichgültig, ob man die Länge 3mal so groß, und dagegen die Breite 3mal so klein annimmt, oder ob man die Breite 4mal so groß, und die Länge 4mal so klein annimmt. Durch diese Veränderung wird der Inhalt des Balkens nicht verändert.

Weil nun das Produkt 24 durch die Multiplication der Länge, Breite und Dicke erwachsen ist; so findet man die Länge wieder, wenn 24 durchs Produkt der Breite 3 in die Dicke 2 dividirt wird.

Die Breite bleibt im Quotienten zurück, wenn die Division durchs Produkt der Länge in die Dicke verrichtet wird; und die Dicke erhält man, wenn die Division durchs Produkt der Länge in die Breite geschiehet. Denn, was durch die Multiplication zusammen gehäuft ist, das wird durch eine gleiche Division wieder in seine vorigen Größen zerlegt.

Wenn aber auch von Länge, Breite, und Dicke zweyerley willkührlich gegeben, und das dritte gesucht wird; so braucht man nur den Inhalt des ganzen Körpers, durchs Produkt der gegebenen Theile zu dividiren, um im Quotienten die Größe des gesuchten Theils zu erhalten. Z. E. man verlangt einen Balken, dessen körperlicher Inhalt 48 Cubicfuß seyn soll, die Breite desselben soll 3 Fuß, die Dicke 2 Fuß halten; so wird die Länge seyn 48 dividirt durch 2 mal 3, ist 8 Fuß.

Dieses giebt die Anleitung, wie man verfahren müsse, wenn mehrere Körper da sind. Z. E. man hätte zween Balken von folgenden Maaßen, und es würde ein Balken gefordert, der so viel Holz als beyde in sich fassen, und 10 Fuß lang, 2 Fuß breit seyn sollte; wie dick müßte dieser Balken seyn?

lang		breit		dick		Produkt
3 Fuß	—	2 Fuß	—	2 Fuß	=	12
5 "	—	3 "	—	1 "	=	15
					Summe	27

Der körperliche Inhalt beyder Balken ist 27 Cubikfuß, wird dieser Inhalt durchs Produkt der gegebenen Länge und Breite dividirt; so ergiebt sich die Dicke desselben in $1\frac{7}{10}$ Fuß.

§. 228.

§. 228.

Es lassen sich aber alle Aufgaben mit vermischten Größen in zwo Classen bringen. Die erste enthält solche Aufgaben, deren Glieder dasjenige ausdrücken, was man würklich hat. Z. E. in obigen beyden Balken hatte man ihre Länge, Breite und Dicke, und diese machten auch die Glieder des Exempels aus.

Die zwote Classe enthält solche Aufgaben, welche Glieder enthalten, die etwas bestimmen, was nicht da ist.

Ein Posten von dieser Art wäre: Ein Capital von 5000 Thlr. ist zu 4 Procent zinsbar belegt; 4 ist hier ein Glied des Exempels, aber 4 bestimmt nicht die Zinse von 5000 Thlr. die man hat, sondern von 100 Thlrn. die man nicht hat. Oder: Ein Posten sey 5 Pfund, 2 Quentg. 4 Pfennige. Hier ist der Preis der Pfunde in Quentgen bestimmt, die man nicht hat.

§. 229.

Die Bearbeitung der Aufgaben beyder Classen, stimmt in folgenden mit einander überein: 1) Man multiplicire die Glieder eines jeden Postens durch einander, hierdurch werden die verschiedenen Glieder eines jeden Postens, in eins gebracht. 2) Nun addire man diese Produkte besonders, und nach bewandten Umständen die erforderlichen Glieder der Posten besonders. Hierdurch wird in eins gebracht, und durch einander gemischt, was in verschiedenen Posten zerstreut war.

Nun hat man alle Glieder des Exempels in einer Größe oder in zwo Größen zusammengebracht, nämlich in der Summe der Produkte aller Glieder und in der

der wahren Summe einer Columne. Eine Aufgabe der ersten Art wäre folgende:

Man hat 3 Stück Leinewand, 1) 5 Ellen lang, 2 Ellen breit, 2) 7 Ellen lang, $\frac{3}{4}$ breit, 3) 10 Ellen lang, 3 Ellen breit; man will von so vielem Garn, als zu den dreyen Stücken verbraucht ist, ein Stück machen lassen, das 20 Ellen lang seyn soll; wie breit muß es gemacht werden?

lang			breit			Prod.
5 Ell.	—	—	2 Ell.	—	—	10
7 "	—	—	$\frac{3}{4}$ "	—	—	$5\frac{1}{4}$
10 "	—	—	3 "	—	—	30
22 "	—	—	$5\frac{3}{4}$ "	—	—	$45\frac{1}{4}$ Elle.

§. 230.

Es kömmt vornehmlich darauf an, daß man wisse, was eigentlich die Summe der Produkte in den Exempeln der zwo Classen sey. Weis man dieses, so läßt sich alles, was man wissen will, leicht finden.

In den Exempeln der ersten Art, oder in den Aufgaben, deren Glieder dasjenige bestimmen, was man hat, **ist die Summe der Produkte der Innbegriff aller Glieder des Exempels, man kann ihr den Namen einer jeden Columne beylegen, die Summe einer jeden der übrigen Columnen ist alsdenn 1.**

Die Summe der Produkte heißt in dem letzten Exempel: Ein Stück Leinewand, das $45\frac{1}{4}$ Elle lang und eine Elle breit ist, ist so groß, als die gegebenen drey Stücke. Oder, ein Stück, das $45\frac{1}{4}$ Ellen breit und eine Elle lang ist, hält ebenfalls so viel, als die drey Stücke.

Dividirt man die Summe der Produkte, oder die Fläche des neuen Stücks, durch die Summen der Längen;

gen; so erhält man die Breite. $45\frac{1}{4}$ dividirt durch 22, giebt die Breite $2\frac{5}{88}$ Ellen.

Sucht man die Länge von einem Stücke, dessen Fläche $45\frac{1}{4}$ Ellen halten, und $5\frac{3}{4}$ Ellen breit seyn soll; so muß die Fläche $45\frac{1}{4}$ durch die Breite $5\frac{3}{4}$ Ellen dividirt werden. Diese Länge ist $7\frac{20}{23}$ Ellen.

Oder da die Aufgabe die Breite eines Stücks fordert, das 20 Ellen lang und dessen Fläche $45\frac{1}{4}$ Ellen groß seyn soll, so multiplicire man die Summe der Produkte $45\frac{1}{4}$ durch die gegebene Länge 20, der Quotient giebt die gesuchte Breite $2\frac{21}{80}$ Ellen. Ueberhaupt bestehet eine Aufgabe von dieser Art aus Geld und Zeit, und man dividirt die Summe der Produkte durch die Summe der Zeitcolumne; so erfolgt im Quotienten Geld. Dividirt man durch Geld; so erfolgt Zeit.

Die Probe bestehet darinn, daß die Summe der Produkte wieder erscheinen muß, wenn man die gefundene Länge und Breite durcheinander multiplicirt.

§. 231.

In den Aufgaben, die zur zwoten Classe gehören; oder in den Aufgaben, welche Glieder enthalten, die etwas bestimmen, was nicht da ist, **ist die Summe der Produkte der Werth von der wahren Summe einer Columne der Glieder, und zwar in dem Maaße, durch welche diese Glieder bestimmt sind.** Z. E.

Man gießet 3 Maaß Wein, à Maaß 4 Groschen, 6 Maaß à 3 Groschen, 5 Maaß à 2 Groschen zusammen; wie hoch kömmt nun das Maaß? oder wieviel kömmt 1 Maaß im Durchschnitt?

3 M.	—	à 4 Gr.	—	12 Prod.
6 =	—	= 3 =	—	18 =
5 =	—	= 2 =	—	10 =
14 =			Summa	40 =

Weil

Weil die gegebenen Preise 4, 3, 2 Groschen den Werth von einzelnen Maaße, die man nicht hat, bestimmen, nicht aber den Werth von 3, 6, 5 Maaß, als welche man hat; so ist 40 Groschen der Werth von 14 einzelnen Maaßen, also von 14 Maaß. Nun man weis, daß 14 Maaß 40 Groschen kosten, so ist durch die Kettenregel leicht zu bestimmen, wieviel ein Maaß kosse.

1 Gr.	—	—	1 M.
14 M.	—	—	40 Gr. Fac. $2\frac{5}{7}$ Gr.

Die Summe der Groschen im obigen Exempel ist nicht die wahre Summe, sie ist hier eine nichts sagende Zahl. Denn was kann doch der Preis von einzelnen Maaßen nutzen, die ich im Exempel nicht habe.

§. 232.

Dadurch, daß man weis, was eigentlich die Summe der Produkte in beyden Arten von Aufgaben sey, sieht man sich in den Stand gesetzt, alle mögliche Aufgaben von vermischten Größen aufzulösen, und alle Fragen, die aus einer Aufgabe herzuleiten sind, beantworten zu können. In der Folge wird die Anwendung auf besondere Fälle völlig klar und leicht werden.

§. 233.

Noch ist zu erinnern, daß in allen Fällen in jeder Columne nur Ein Name seyn darf. Giebt die Aufgabe den Gliedern einer Columne mehrere Namen; so müssen sie auf einen gebracht werden. Z. E. Eine Geldcolumne bestehe aus den Gliedern: 2 Louisd'or, 6 Thaler, 7 Groschen; so würde man diese Glieder am bequemsten auf Thaler bringen, nämlich 10 Thaler, 6 Thaler, $\frac{7}{32}$ Thaler. Man versteht hier aber nicht

solche

solche Namen, die keinen Einfluß in die Rechnung haben. Wenn es z. E. nur auf den Preis der Waare ankömmt; so ist es gleichgültig, ob 2 Pfund oder 2 Ellen 4 Thaler kosten.

1) Man gießet durch einander, 3 Anker Wein, die Bouteille 8 Groschen 9 Bouteillen à 10 Groschen, 20 Bouteillen Wasser, 1 Orthoft, die Bouteille 5 Gr. 1) Wieviel ist die ganze Masse werth? 2) Wieviel ist 1 Anker oder 1 Bouteille nach der Vermischung werth?

Die verschiedenen Maaße druckt man am besten durch Anker aus.

3	Ank.	à	Bout.	8	Gr.	—	24	Gr.
$\frac{9}{40}$	"	"	"	10	"	—	$2\frac{1}{4}$	"
$\frac{1}{2}$	"	"	"	0	"	—	0	"
6	"	"	"	5	"	—	30	"
$9\frac{29}{40}$	"						$56\frac{1}{4}$	"

Weil die Geldcolumne den Preis von Bouteillen bestimmt, die erste Columne aber Anker enthält, so ist $56\frac{1}{4}$ Groschen der wahre Preis von $\frac{29}{40}$ Bouteillen, nicht aber von so vielen Ankern. Da man nun dieses weis, wie leicht ist es nun nicht, durch die Kettenregel zu bestimmen, wie viele Thaler 1 Anker, oder wie viele Groschen eine Bouteille, oder wie viel $9\frac{29}{40}$ Anker kosten.

1 Thl. — $9\frac{29}{40}$ Ank.	1 Thl. — 1 Ank.	1 Gr. — 1 Bout.
$9\frac{29}{40}$ Bout. $56\frac{1}{4}$ Gr.	$9\frac{29}{40}$ B. — $56\frac{1}{4}$ Gr.	$9\frac{29}{40}$ B. $56\frac{1}{4}$ Gr.
1 Ank. — 40 Bout.	36 Gr. — 1 Thl.	Fac. $5\frac{305}{389}$ Gr.
36 Gr. — 1 Thl.	1 Ank. — 40 B.	
Fac. $62\frac{1}{2}$ Thlr.	Fac. $6\frac{165}{389}$ Thlr.	

2) Man hat 320 Thaler zu 5 Procent auf 4 Jahren; 80 Thaler zu 6 Procent auf 3 Monate; 200 Thaler zu 3 Procent auf 3 Jahre zinsbar belegt; 1) wieviel

wieviel beträgt die sämmtliche Zinse? 2) wieviel ist die jährliche Zinse von 100 Thaler im Durchschnitte?

Cap.		Zins von 100		Jahre		Prod.
320 Thlr.	—	5 Thlr.	—	4	—	6400
80 "	—	6 "	—	$\frac{1}{4}$	—	120
200 "	—	3 "	—	3	—	1800
600 Thlr.						8320 T.

Weil die jährliche Zinse nicht auf einzelne Thaler, sondern auf 100 bestimmt sind; so ist 8320 Thaler die wahre sämmtliche Zinse von so vielen 100 Thalern, als einzelne Thaler sind, also von 60000 Thaler. Nun giebt die Kettenregel die gesuchte Zinse von 600 Thlr.

1 Z.	—	—	600 Thlr.
60000 Thlr.	—	—	8320 Z. Fac. $83\frac{1}{3}$ Thlr.

Um der zwoten Forderung ein Genüge zu leisten, lasse man die Jahre aus der Aufgabe weg, denn der Jahre wird in der 2ten Frage nicht erwehnt, sie haben auch keinen Einfluß in die Frage. Uebrigens verfahre man wie zuvor.

Cap.			Zins	Prod.
320 Thlr.	—	—	5 ——	1600
80 "	—	—	6 ——	480
200 "	—	—	3 ——	600
600				2680

Weil die Zinsen von 100 und jährlich bestimmt sind, so ist 2680 die wahre jährliche Zinse von 60000 Thaler, also:

1 Z.	—	—	100 Thlr.
60000 Thlr.	—	—	2680 Fac. $4\frac{7}{15}$ Thlr.

3) Es werden in einer Fabrique 4 Stück Zeug bestellt a) 300 Ellen $\frac{5}{4}$ breit, b) 100 Ellen $\frac{3}{4}$ breit, c) 250 Ellen

Ellen 2 Ellen breit, d) 50 Ellen $\frac{2}{3}$ breit. Nun wird der Entschluß dahin abgeändert, daß von dem dazu bestimmten Garne vier Stück gewebt werden sollen, deren Länge der ersten Bestellung gleich, die Breite aller Stücke aber einerley seyn soll. Wie breit müssen die Stücke gemacht werden?

lang			breit	Prod.
300 Ell.	—	—	$\frac{5}{4}$ —	375
100 "	—	—	$\frac{3}{4}$ —	75
250 "	—	—	2 —	500
50 "	—	—	$\frac{2}{3}$ —	$33\frac{1}{3}$
700 "				$983\frac{1}{3}$

Daß dis ein Exempel der ersten Art sey, sieht ein jeder. Länge und Breite durch einander multiplicirt, giebt die Fläche, folglich halten alle 700 Ellen nach ihren verschiedenen Breiten $983\frac{1}{3}$ Quadratellen. Das ist: 700 Ellen halten nach ihren verschiedenen Breiten so viel Quadratellen, als ein Stück hält, das $983\frac{1}{3}$ Ellen lang und Eine Elle breit ist.

Nun soll, nach der Aufgabe, die Länge aller Stücke 700 Ellen seyn; daher dividirt man die Fläche $983\frac{1}{3}$ durch die Länge 700, um die Breite, welche $1\frac{17}{42}$ Ellen ist, zu erhalten.

Sollte die Breite aller Stücke $\frac{5}{8}$ Ellen seyn, und man wollte die Länge finden; so müßte die Fläche durch $\frac{5}{8}$ dividirt werden. Der Quotient, als die gesuchte Länge, ist $1573\frac{1}{3}$ Ellen.

4) Man hat drey Balken, a) ist lang $1\frac{1}{2}$ Ruthe, breit 2 Fuß, dick $1\frac{1}{4}$ Fuß. b) 1 Ruthe lang, $1\frac{2}{3}$ Fuß breit, 1 Fuß 2 Zoll dick, c) $\frac{4}{5}$ Ruthen lang, 10 Zoll breit, 8 Zoll dick. Man verlangt einen Balken, der so viel Holz, als diese drey, in sich fassen, und 2 Fuß breit, $1\frac{1}{2}$ Fuß dick seyn soll; wie lang muß dieser Balken seyn?

lang		breit		dick		Innhalt
288 Zoll	—	24 Zoll	—	15 Zoll	—	103680
192 ″	—	20 ″	—	14 ″	—	53760
$153\frac{3}{7}$ ″	—	10 ″	—	8 ″	—	12288
						169728

Daß der Innhalt eines viereckten Körpers sich ergiebt, wenn dessen Länge, Breite und Dicke durcheinander multiplicirt wird; ist bereits gesagt. Wird nun der Innhalt aller drey Balken 169728 Zoll durchs Produkt der gegebenen Breite 2 Fuß und Dicke $1\frac{1}{2}$ Fuß, oder 24.18 = 432 Zoll dividirt; so erfolgt die gesuchte Länge. $\frac{169728}{432}$ ist Länge $392\frac{24}{27}$ Zoll.

5) Man kauft 10 Himten Korn, den Himten 1 Thaler; 112 Himten à 30 Groschen; 360 Himten à 24 Groschen; 95 Himten à $1\frac{1}{3}$ Thaler. 1) Wie theuer kömmt alles Korn? 2) Wie hoch ein Himten im Durchschnitte? das ist: wieviel Groschen kostet 1 Himten, wenn alles Korn durch einander vermischt wird?

Himten			Groschen	Prod.
10	—	à —	36	— 360
112	—	″ —	30	— 3360
360	—	″ —	24	— 8640
95	—	″ —	48	— 4560
577 Himt.			Summa	16920

1 Gr. — — 1 Himt.

577 Himt. — — 16920 Gr. Fac. $29\frac{187}{577}$ Gr.

Hätte man wissen wollen, wieviel 10 Himten durch die Bank kosten, so wäre der Satz:

1 Gr. — — 10 Himt.

577 Himt. — — 16920 Gr. Fac. $293\frac{139}{577}$ Gr.

6) Man hat folgende Geldsorten, welche gegen Louisd'or verwechselt werden sollen. Gulden sind 9 Procent,

Ducaner

Ducaten 3 Procent, Cassengeld 7 Procent besser als Louisd'or. 1) Wieviel ist das sämmtliche Agio auf alle Capitale? 2) Wieviel wird das ganze Geld durch einander von 100 Agio geben?

Thaler				
500	—	9 Proc.	—	4500 Agio
420	—	3 "	—	1260 "
240	—	7 "	—	1680 "
1160 Thlr.				7440 Thlr. Agio.

Weil die Agio auf 100 nicht auf einzelne Thaler bestimmt ist; so ist 7440 die wahre Agio auf 116000 Thaler, woraus sich beyde Fragen durch die Kettenregel leicht beantworten lassen.

1 Agio — 1160 Thl.	1 Agio — 100 Thl.
116000 Thlr. — 7440	116000 Thlr. — 7440 Thl.
Fac. $74\frac{2}{5}$ Thlr.	Fac. $6\frac{12}{29}$ Thlr.

7) Eine Dorfschaft ist schuldig, des Jahrs mit 50 Mann 32 Tage lang Herrndienste zu thun. Zum ersten erscheinen 12 Mann 10 Tage, 2) 18 Mann 24 Tage, 3) 13 Mann 15 Tage, 4) 30 Mann 8 Tage. Nun kömmt ein Befehl, daß so viel Mann zur Arbeit geschickt werden sollen, daß der Rest des Dienstes in 7 Tagen abgetragen sey. Wieviel Mann müssen diese 7 Tage zur Arbeit geschickt werden?

50 Mann	—	32 Tage	—	1600
12 "	—	10 "	—	120
18 "	—	24 "	—	432
13 "	—	15 "	—	195
30 "	—	8 "	—	240
		1600		987

Subt. 987

Rest 613 : 7 Fac. $87\frac{4}{7}$ Mann.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Aufgabe und die folgenden ähnlichen Aufgaben zu den Exempeln der ersten Art gehören.

Die Dorfschaft ist schuldig, das Produkt 1600 zu leisten, hat aber erst das Produkt 987 geleistet. Die Subtraction zeigt, daß sie noch ein Produkt von 613 zu leisten schuldig sey. Dis Produkt 613 ist der Inbegriff der noch folgenden Zeit und Mannschaft. Dividirt man solches durch die gegebene Zeit zurück, so ist der Quotient $87\frac{4}{7}$ die gesuchte Anzahl Menschen.

Oder auch so: Der Rest 613 sagt: es muß noch 1 Mann 613 Tage, oder es müssen noch 613 Mann 1 Tag arbeiten; da nun die Arbeit nicht in Einem, sondern in 7 Tagen vollendet seyn soll; so ist eine 7 mal geringere Anzahl Arbeiter hinlänglich, das Produkt zu erschöpfen. Es muß daher 613 durch 7 dividirt werden.

Wäre zuletzt eine gewisse Anzahl Mannschaft gefordert, und es sollte die Zeit ihrer Arbeit gefunden werden; so hätte der Rest 613 durch die geforderte Anzahl Mannschaft dividirt die gesuchten Tage gegeben. Z. E. wären zuletzt 100 Mann gefordert, so hätten diese, um die ganze Pflicht zu erfüllen, $6\frac{13}{100}$ Tage arbeiten müssen.

8) Ein Bruder ist der Schwester 1000 Thaler nach 6 Monaten zu bezahlen schuldig, die Schwester dem Bruder 500 Thaler nach 4 Monaten, die Schwester trägt ihre Schuld sogleich ab, damit sie die 1000 Thaler um desto früher erhalten möge; nach wie vielen Monaten muß der Bruder die 1000 Thaler bezahlen?

1000 Thlr. — 6 Mon. — 6000
500 = — 4 = — 2000:

Rest 4000 : 1000 = F. 4 Mon.

Weil der Bruder sein Geld früher erhalten hat, so ist er

er dadurch verbunden, auch seine Schuld früher zu bezahlen. Es muß daher sein zu leistendes Produkt 6000 kleiner werden. Der Schwester Produkt wird also, weil sie es abträgt, von dem seinigen abgezogen; bleibt Rest 4000. Da man nun Zeit sucht; so wird durch Geld, durch 1000 Thaler, dividirt.

Oder auch: Der Rest sagt, daß der Bruder 4000 Thaler 1 Monat, oder 1 Thaler 4000 Monat behalten könne. Daher:

1 Mon. } — { 1 Thlr.
1000 Thlr. } { 4000 Mon. Fac. 4 Mon.

9) Ein Mann ist dem andern 800 Thaler nach 5 Jahren, der andere dem ersten 100 Thaler nach 10 Jahren zu bezahlen schuldig. Der erste trägt seine Schuld wider den Accord erst nach 7 Jahren ab; wie viele Jahre kann der andere die 100 Thaler nunmehro behalten?

800 Thlr. — 2 Jahr — 1600
100 : — 10 : — 1000

Summe 2600: 100 ist F. 26 Jahr.

Da der erste seine Bezahlung 2 Jahre über die bestimmte Zeit verschiebt; so kömmt dieser Verzug dem andern zu gute. Weil daher des 2ten Produkt um so viel größer werden soll; so wird des ersten Produkt zum Produkte des andern addirt. Da nun Zeit gesucht wird, so geschieht die Division durch 100 Thaler.

10) Einer ist dem andern ohne Zinsen zu bezahlen schuldig 600 Thaler nach 4 Monaten, 900 Thaler nach 6 Monaten. Beyde Posten sollen zugleich entrichtet werden; wie lange kann der Debitor beyde Capitale behalten?

600 Thlr.	—	4 Mon.	—	2400	
900 „	—	6 „	—	5400	
1500 „		Summ.		7800 : 1500 ist F. $5\frac{1}{7}$ M.	

Weil beyde Capitale in einer Summe bezahlt werden sollen, so müssen sie auch hier, und auch ihre Produkte in eine Summe gebracht werden.

11) Einer ist dem andern 1200 Thaler nach 10 Wochen zu bezahlen schuldig, bezahlt aber sogleich 800 Thaler; wie lange darf er die übrigen 400 Thaler behalten?

1200 Thl. — 10 W. — 12000 : 400 ist F. 30 Woch.
800
Rest 400

Weil 800 Thaler vom schuldigen Capitale abgetragen werden, so zieht man sie auch hier ab.

12) Man kauft für 10000 Thaler Waare, mit dem Bedinge, daß 2500 nach 3 Monaten, 3000 nach 6 Monaten, 2000 nach 8 Monaten, 2500 nach 1 Jahre bezahlt werden sollen; der Käufer will die ganzen 10000 Thaler auf einmal entrichten; nach wie vielen Monaten muß dieses ohne Nachtheil des anfangs getroffenen Accords geschehen?

2500 Thlr.	—	3 Mon.	—	7500	
3000 „	—	6 „	—	18000	
2000 „	—	8 „	—	16000	
2500 „	—	12 „	—	30000	
10000				71500 : 10000	
				Fac. $7\frac{3}{20}$ Mon.	

13) Man kauft für 12000 Thaler Waare, und bedinget 3000 Thaler sogleich, 2500 nach 4 Monaten, 1500 nach 6 Monaten, 1000 nach 9 Monaten, 2000 nach 1 Jahre, die übrigen 2000 nach $1\frac{1}{2}$ Jahren

ren zu bezahlen; wenn nun alles auf einmal entrichtet wird; nach wievielen Monaten muß dieses geschehen?

3000	Thlr.	—	0	Mon.		
2500	"	—	4	"	—	10000
1500	"	—	6	"	—	9000
1000	"	—	9	"	—	9000
2000	"	—	12	"	—	24000
2000	"	—	18	"	—	36000
12000	"					88000 : 12000

Fac. $7\frac{1}{3}$ Mon.

14) Man gebraucht zu 3 Ellen $\frac{3}{4}$ breite Leinewand 4 Stück Garn. Von diesem Garn hat man 8000 Stück. Ist dieser Vorrath zu folgenden Stücken, die gemacht werden sollen, hinlänglich?

Stück		lang		breit		Fläche
5	— à —	20 Ell.	—	$\frac{5}{4}$ Ell.	—	125 Ell.
10	— " —	50 "	—	2 "	—	1000 "
4	— " —	100 "	—	$1\frac{1}{2}$ "	—	600 "
110	— " —	40 "	—	$\frac{2}{3}$ "	—	$2933\frac{1}{3}$ "
					Summa	$4658\frac{1}{3}$ "

Da nun alle Stücke zusammengenommen einem Stücke gleich sind, das $4658\frac{1}{3}$ Ellen lang und 1 Elle breit ist; so findet man, wie viele Stücke Garn hierzu erfordert werde, durch die Kettenregel.

1 Stück	—	—	$\left\{\begin{array}{l}4658\frac{1}{3}\text{ Ell.}\\ 1\text{ Ell. breit}\end{array}\right.$
3 Ellen $\frac{3}{4}$ breit	—	—	4 Stück. F. $828\frac{1}{27}$ St.

Wenn die Kaufleute sagen: unter einer Waare sey Justi, so verstehen sie darunter: es sey die Waare mit schlechtem Guthe, das entweder nichts, oder weniger als die beste Waare werth sey, vermischt.

15) Man kauft 280 Pfund, worunter 60 Pfund Fusti, jedes Pfund zu $1\frac{2}{3}$ Thaler, 220 Pfund, das Pfund 2 Thaler; wieviel kostet 1 Pfund im Durchschnitte?

60 Pf. — à — $1\frac{2}{3}$ Thl. — 100 — 1 Thl. — 1 Pf.
220 = — = — 2 = — 440 — 280 Pf. — 540 Thlr.
280 Pf. — 540 Thlr. Fac. $1\frac{13}{14}$ Thlr.

16) Im folgenden Exempel ist die Länge und Breite von vier Feldern, deren jedes ein längliches Quadrat macht, nebst der Pacht, welche ein jedes Feld jährlich giebt, angegeben; wieviel Thaler Pacht thut ein Morgen im Durchschnitte?

lang	breit	Fläche	
65 R.	— 30 R.	— 1950 R.	— 50 Thlr.
33 =	— 10 =	— 330 =	— 9 =
2 =	— $1\frac{1}{2}$ =	— 3 =	— 1 =
8 =	— 4 =	— 32 =	— $1\frac{1}{2}$ =
2315 R.		$61\frac{1}{2}$ =	Fac. $3\frac{17}{46}$ Thlr.

Da die Pacht der ganzen Flächen durch die Summe der Pacht $61\frac{1}{2}$ Thaler schon bestimmt ist; so giebt die Kettenregel die Pacht eines Morgens im Durchschnitte.

17) Der Morgen eines Feldes, das 160 Ruthen lang, 30 Ruthen breit ist, giebt jährlich 2 Thaler Pacht, der Morgen eines andern Feldes, das 33 Ruthen lang, 10 Ruthen breit ist, giebt $4\frac{1}{2}$ Thaler, der der Morgen eines Feldes, das 3 Ruthen lang, $1\frac{1}{2}$ Ruthe breit ist, giebt 6 Thaler; wieviel giebt der Morgen im Durchschnitte?

Flächen

Flächen.						Prod.	
4800 R.	—	à M.	—	2 Thlr.	—	9600	Thl.
330 =	—	= =	—	$4\frac{1}{2}$ =	—	1485	=
$4\frac{1}{2}$ =	—	= =	—	6 =	—	27	=
$5134\frac{1}{2}$ =						11112	=

Weil die Größe der Felder in Ruthen angegeben, die Pacht auf Morgen bestimmt ist; so ist 11112 Thaler die Pacht für so viele Morgen, als alle Flächen Ruthen halten, also von $5134\frac{1}{2}$ Morgen. Woraus sich die Pacht von Einem Morgen durch die Kettenregel leicht bestimmen läßt.

1 Thlr.	—	—	1 M.
$5134\frac{1}{2}$ M.	—	—	11112 Thlr. Fac. $2\frac{562}{3423}$ Thlr.

18) Nach den Gesetzen der calenbergischen Landschaft wird einem Zinsmeyer an seinen zu liefernden Früchten nicht anders Remißion gegeben, als wenn der Mißwachs zum wenigsten die Hälfte ausmacht, und zwar in allen Feldern durch einander. Beträgt der Mißwachs überhaupt die Hälfte der Erndte; so wird $\frac{1}{4}$ der Abgabe erlassen; ist der Mißwachs $\frac{2}{3}$, so wird $\frac{1}{2}$ erlassen; $\frac{3}{4}$ Mißwachs giebt die Hälfte Erlaß; ist der Abgang total, so muß $\frac{1}{4}$ bezahlt werden. Der Mißwachs wird durch beeidigte Achtsleute bestimmt.

Wie groß ist der Mißwachs in folgenden Feldern überhaupt?

200 Morg.	—	$\frac{13}{48}$ Mißw.	—	$54\frac{1}{8}$	Prod.		
48 =	—	$\frac{19}{32}$ =	—	$25\frac{1}{3}$	=		
12 =	—	$\frac{15}{16}$ =	—	$11\frac{1}{4}$	=		
300 =	—	$\frac{3}{32}$ =	—	$28\frac{1}{8}$	=		
560 Morg.				1187/8	Mißw.		

1 Mißw.	—	1 Morg.	
560 Morg.	—	1187/8 Mißw.	Fac. $\frac{957}{44480}$ Mißw.

Es kann also die Dorfschaft keine Remißion fordern, weil der Mißwachs überhaupt nicht die Hälfte beträgt.

19) Man will eine viereckte Pfanne machen lassen, welche 72 Zoll lang 60 Zoll breit seyn, und so viel Wasser als folgende 5 Pfannen in sich fassen soll, wie tief muß diese Pfanne gemacht werden?

lang		breit		tief		Inhalt
42 Zoll	—	24 Zoll	—	8 Zoll	—	8064 Zoll
12 =	—	8 =	—	9 =	—	864 =
48 =	—	36 =	—	11 =	—	19008 =
9 =	—	6 =	—	10 =	—	540 =
24 =	—	10 =	—	42 =	—	10080 =
						38556 =

Die Summe der Produkte 38556 ist der Innhalt aller 5 Pfannen in Cubiczollen, und auch der Innhalt der neuen Pfanne. Dividirt man diesen Innhalt durchs Produkt der gegebenen Länge und Breite der neuen Pfanne 4320; so giebt der Quotient die gesuchte Tiefe derselben $8\frac{37}{40}$ Zoll.

Wollte man die Länge einer Pfanne finden, deren Breite und Tiefe durch 30 und 50 Zoll bestimmt ist, und ebenfalls 38556 Zoll halten soll; so würde man diesen Innhalt durch 30 mal 50 Zoll dividiren müssen, um die Länge $25\frac{88}{125}$ zu erhalten.

Wird die Länge, Breite und Tiefe der beyden neuen Pfannen durcheinander multiplicirt, so zeigt sich, daß der Innhalt mit obigen 5 Pfannen gleich sey.

20) Man gebraucht zu einer Elle $\frac{5}{4}$ breites Zeug 2 Stück Garn; wieviel Stück Garn gebraucht man zu folgenden 4 Stücken Zeug?

Länge

Länge		Breite		Fläche
70 Ell.	— —	$\frac{3}{4}$ Ell.	— —	$52\frac{1}{2}$ Ell.
100 =	— —	$1\frac{1}{2}$ =	— —	150 =
30 =	— —	2 =	— —	60 =
$7\frac{1}{2}$ =	— —	$1\frac{3}{4}$ =	— —	$13\frac{1}{8}$ =
				$275\frac{5}{8}$ =

Der Inbegriff aller Stücken ist einem Stücke gleich, das $275\frac{5}{8}$ Ellen lang, 1 Elle breit ist. Nun giebt die Kettenregel das weitere.

1 St. — — { $275\frac{5}{8}$ Ell. 1 breit

1 Ell. / $\frac{5}{4}$ br. — — 2 St. F. 441 St.

21) Man kauft in Cassengelde ein:

16 Pf. Reiß	— à	2 Gr.	—	32 Gr.
40 Himt. Korn	=	48 =	—	1920 =
100 Pf. Zucker	=	8 =	—	800 =
80 Ell. Leinew.	=	10 =	—	800 =
				3552 = Cssg.

Wieviel Stück Louisd'or muß man überhaupt bezahlen? Da man weiß, daß die Summe der Produkte der Werth der ganzen ersten Columne sey; so giebt die Kettenregel die Anzahl der Louisd'or.

1 Louisd'or	—	3552 Gr. M.
96 Gr.	—	1 Thlr.
$4\frac{2}{3}$ Thlr. Cm.	—	1 Louisd'or. Fac. $21\frac{1}{7}$ Louisd'or.

22) Man kauft 305 Pfund Kaffee, à Centner 10 Thaler, 210 Pfund à Centner 9 Thaler; wie hoch kömmt 1 Pfund im Durchschnitte?

305 Pfund	— a C.	— 10 Thlr.	— 3050 Thlr.
210 =	— a C.	— 9 =	— 1890 =
515 Pfund			4940 Thlr.

4940 Thlr. ist der Preis von 515 Centner, woraus sich der Werth eines Pfundes bestimmen läßt, welcher $3\frac{1167}{2572}$ Gr. ist.

23) Man kauft in Louisd'or ein, 356 Pfund a Centner 10 Thlr. 210 Pfund a Centner 9 Thlr. 18 Gr. 30 Pfund a Centn. 16 Thlr. vermischt alles durch einander; wie theuer muß 1 Pfund in Cassenmünze verkauft werden, um 10 auf 100 zu gewinnen?

356 Pfund	— a Centn.	— 10 Thlr.	— 3560 Th.
210 =	— a Centn.	— $9\frac{1}{2}$ =	— 1995 =
30 =	— a Centn.	— 16 =	— 480 =
596 Pfund			6035 Th.

1 Gr. Cassm. geh.	—	1 Pfund
596 Centn.	—	6035 Thlr. Gold ausgel.
100 Pfund	—	1 Centn.
1 Thlr.	—	36 Gr.
15 Gold	—	14 Cassm.
100 ausgel.	—	110 gehob. F. $3\frac{553}{7475}$ Gr.

24) Man gießet zu einem Anker Wein, die Bouteille 6 Gr. 7 Bout. Wasser; wieviel ist nun die Bouteille werth?

40 Bout.	— à 6 Gr.	— 240
7 =	— à 0 =	
47 Bout.		F. $5\frac{5}{47}$ Gr.

25) 1 Pfund Wachs kostet 14 Gr., 1 Pfund Hammeltalg 7 Gr., 1 Pfund Ochsentalg 3 Gr. 4 Pf., man schmelzt zusammen 42 Pfund Wachs, 300 Pf. Hammel-

Hammeltalg, 1500 Pfund Ochsentalg; wie hoch kömmt 1 Pfund im Durchschnitt?

42 Pf.	a	14 Gr.	588 Gr.		
300 =	a	7 =	2100 =		
1500 =	a	$3\frac{1}{2}$ =	5250 =	Fac. $4\frac{570}{1842}$ Gr.	
1842 Pfund		kosten	7938 Gr.		

26) Man hat folgende Stück Geldsorten; wieviel Thlr. beträgt alles?

Stück					
27 Louisd'or	— a —	5 Thlr.	— 135 Thlr.		
22 Gulden	— a —	$\frac{2}{3}$ =	— $14\frac{2}{3}$ =		
10 Ducaten	— a —	$2\frac{3}{4}$ =	— $27\frac{1}{2}$ =		
11 Gr.	— a —	$\frac{1}{36}$ =	— $\frac{11}{36}$ =		
				Fac. 177 Thlr. 17 Gr.	

27) Wenn der Himten Rocken 1 Thlr. gilt, so bekömmt man 8 Pfund Brodt für 6 Gr.; wieviel Pf. Brodt bekömmt man für 9 Gr., wenn 16 Himten Waizen a 1 Thlr. 12 Gr., 20 Himten Rocken a 30 Gr., 6 Himten Gersten a 16 Gr. unter einander verbacken werden?

16 Himten	— a —	48 Gr.	— 768 Gr.		
20 =	— a —	30 =	— 600 =		
6 =	— a —	16 =	— 96 =		
42 Himten		kosten	1464 Gr.		
1 Pfund	— —	9 Gr.			
1464 Gr.	— —	42 Himten			
1 Himten	— —	36 Gr.			
6 Gr.	— —	8 Pfund	Fac. $12\frac{24}{61}$ Pf.		

28) Man schmelzt folgendes Silber zusammen; wieviel löthig ist die Masse?

Loth

Loth			löthig			
15	—	—	15	—	—	225
76	—	—	10	—	—	760
22	—	—	14	—	—	308
10	—	—	13	—	—	130
5	—	—	6	—	—	30
27 Kupfer	—		0	—	—	0
155 Loth						1453

Löthig zeigt an, wieviel Loth fein Silber in einer Mark oder in 16 Lothen enthalten sey; 4 löthig oder 6 löthig sagt: in einer Mark befindet sich 4 oder 6 Loth fein Silber. Da nun das Löthige auf Mark bestimmt ist, im Exempel aber nur Lothe sind; so ist nicht unter 155 Loth, sondern unter 155 Mark, 1453 Loth fein Silber, woraus sich durch die Kettenregel leicht finden läßt, wieviel fein 1 Mark hält, oder wie viel löthig die Masse ist.

1 fein	—	—	1 Mark
155 Mark	—	—	1453 Loth fein Fac. $9\frac{53}{155}$ löth.

29) Man gebraucht eine Decke die 50 Ellen lang, 40 Ellen breit ist; zu dieser Decke hat man folgende Stücke. Wieviel Ellen bleiben übrig, oder wieviel Ellen fehlen?

Stück		lang		breit		
3	— a —	16 Ellen	—	5 Ell.	—	240 Ell.
1	— a —	30 "	—	2 "	—	60 "
7	— a —	20 "	—	$1\frac{1}{2}$ "	—	210 "
10	— a —	100 "	—	1 "	—	1000 "
3	— a —	80 "	—	$1\frac{1}{4}$ "	—	300 "
						1810 Ell.

Die Fläche der verlangten Decke ist 50 . 40 = 2000 Quadratellen, die Fläche der hierzu bestimmten Stücke

Stücke ist nur 1810 Quadratellen. Die Subtraction zeigt daß noch 190 Quadratellen fehlen.

30) 3 Menschen arbeiten 4 Tage, jeder bekömmt den Tag 3 Gr; 5 Menschen arbeiten 5 Tage den Tag 4 Gr.; 2 Menschen arbeiten 3 Tage, den Tag vor 2 Groschen.

Die Fragen welche hieraus hergeleitet werden können, sind folgende:

1) Wie viele Tage haben alle 10 Menschen gearbeitet, wenn nämlich einer nach dem andern arbeitete? Fac. 43 Tage.

2) Wie viele Tage im Durchschnitt hat jeder der Menschen gearbeitet? das ist: wenn sie alle zusammen, und gleich lange arbeiteten. Fac. $4\frac{3}{10}$ Tage.

3) Wie viele Gr. bekommen alle 10 Menschen überhaupt? Fac. 148 Gr.

4) Wie viele Gr. bekömmt jeder der Menschen überhaupt? Fac. $14\frac{4}{5}$ Gr.

5) Wie viele Gr. bekommen alle 10 Menschen in jeglichen Tage? Fac. $34\frac{18}{43}$ Gr.

6) Wie viele Groschen bekömmt 1 Mensch in einem Tage? das ist, in einem Tage des Durchschnitts. Fac. $3\frac{19}{43}$ Gr.

Weil die beyden ersten Fragen des Tagelohns nicht erwehnen, so muß dieses weggelassen werden.

Menschen		Tage		Produkt
3	a	4		12 Tage
5	a	5		25 "
2	a	3		6 "
10				43 Tage

Die Antwort auf die erste Frage zeigt sich in der Summe der Produkte, 43 Tage.

Haben aber 10 Menschen 43 Tage gearbeitet, so zeigt die Kettenregel, wie viele Tage, ein, oder jeder

Mensch

Mensch gearbeitet habe. Das Facit $4\frac{3}{10}$ ist die Beantwortung der zwoten Frage. Es ist aber auch $4\frac{3}{10}$ die wahre Summe der Columne der Tage. Die natürliche Summe dieser Columne ist zwar 12, dis ist aber die wahre Summe nicht, weil alle 10 Menschen zusammen genommen, nicht zwölf Tage gearbeitet haben, Unter dem Ausdrucke, alle Tage, oder den Durchschnitt der Tage, versteht man die Zeit, welche ein jeder der 10 Menschen durch gearbeitet hat.

Weil in der dritten Frage des Tagelohns erwehnt wird, so füge man die Geldcolumne den beyden übrigen Columnen bey. Und weil die Summe der Produkte, den Werth der ersten Columne bestimmt, so ist 148 die Beantwortung der dritten Frage.

Menschen	Tage		Gr.	Produkt
3	— — 4	— — 2	3 — —	36
5	— — 5	— — 2	4 — —	100
2	— — 3	— — 2	2 — —	12
10		$4\frac{3}{10}$		148

Die 4te, 5te, 6te Frage ist aus der Summe der Menschen, der Tage, und der Produkte, durch die Kettenregel leicht zu beantworten.

1 Gr. — — 1 M.
10 M. — — 148 Gr. 4 Fac. $14\frac{4}{5}$ Gr.

1 Gr. — — { 10 M. / 1 T.

10 M. / $4\frac{3}{10}$ T. } — 148 Gr. 5 Fac. $34\frac{18}{43}$ Gr.

1 Gr. — — { 1 M. / 1 T.

10 M. / $4\frac{3}{10}$ T. } — 148 Gr. 6 Fac. $3\frac{19}{43}$ Gr.

Die

Die Probe kann man verschiedentlich durch die Kettenregel machen, wenn durch die gefundenen Facitte eine schon bekannte Größe noch einmal gesucht wird. Zeigt sich alsdenn im Facitte die bekannte Größe richtig wieder; so sind gewiß diejenigen Glieder, durch welche sie gefunden worden, ebenfalls richtig.

1 Gr. — — { 10 M. / $4\frac{3}{10}$ Tag

1 M. } — $3\frac{19}{43}$ Gr. Fac. 148 Gr.
1 T. }

31) Man gießet 3 Anker Wein a Orthoft 50 Thlr. $4\frac{1}{2}$ Anker a Orth. 66 Thlr. 5 Anker a Orth. $71\frac{1}{2}$ Thlr. 2 Anker Wasser zusammen; wieviel ist eine Bouteille werth?

3	Ank.	— a Orth.	—	50	Thlr.	—	150 Thlr.
$4\frac{1}{2}$	"	— a Orth.	—	66	"	—	297 "
5	"	— a Orth.	—	$71\frac{1}{2}$	"	—	$357\frac{1}{2}$ "
2	"	—	—	0	"	—	0 "
$14\frac{1}{2}$	Ank.						$804\frac{1}{2}$ Thlr.

1	Gr.	— —	1	Bouteille
$14\frac{1}{2}$	Orth.	— —	$804\frac{1}{2}$	Thlr.
6	Ank.	— —	1	Orth.
40	Bout.	— —	1	Ank.
1	Thlr.	— —	36	Gr. Fac. $8\frac{187}{180}$ Gr.

32) Ein Schaaf verzehrt jeden Tag $\frac{1}{4}$ Metze, ein Schwein $\frac{1}{2}$ Metze, 1 Ochse 1 Metze, 1 Pferd 2 Metzen. Nun füttert man 4 Schaafe 3 Wochen, 7 Schweine 10 Wochen, 12 Ochsen 2 Wochen, 4 Pferde 5 Tage; wieviel Metzen werden jede Woche im Durchschnitte verbraucht?

4 Schaafe	—	3 W.	a Tag	—	$\frac{3}{4}$ Metze	—	3 Metz.
7 Schw.	—	10 =	a Tag	—	$\frac{1}{4}$ Metze	—	35 =
12 Ochsen	—	2 =	a Tag	—	1 =	—	24 =
4 Pferde	—	$\frac{5}{7}$ =	a Tag	—	2 =	—	$5\frac{5}{7}$ =
27 Stück							$67\frac{5}{7}$ M.

Dieses Exempel läßt sich nicht auflösen, bevor man nicht die wahre Summe, oder den Durchschnitt der Wochen weiß. Diese wahre Summe findet man, wenn man das Futter weglässet, und wie gewöhnlich verfährt.

Stück			Produkt
4	—	3 W.	— 12 W.
7	—	10 =	— 70 =
12	—	2 =	— 24 =
4	—	$\frac{5}{7}$ =	— $2\frac{6}{7}$ =
27			$108\frac{6}{7}$ W.

1 Woch.	—	1 Stück	
27 Stück	—	$108\frac{6}{7}$ W.	Fac. $4\frac{2}{63}$ Wochen

Weil aber das Futter nicht in Wochen, sondern in Tagen bestimt ist; so ist $67\frac{5}{7}$ Metzen das Futter, welches 27 Stück in $4\frac{2}{63}$ Tagen verzehren. Hieraus ist nun leicht das Futter einer Woche zu bestimmen.

1 M.	—	1 W.	
$4\frac{2}{63}$ T.	—	$67\frac{5}{7}$ M.	
1 W.	—	7 T.	Fac. $117\frac{72}{127}$ Metzen.

33) Ein Mann gräbt jeden Tag 5 Quadr. Ruthen,
Eine Frau — — 3 —
Ein Kind — — 2 —

Nun haben 8 Mann 5 Wochen, 10 Frauen 2 Wochen, 3 Kinder 9 Tage gearbeitet. Es wird gefragt:

1) Wie

1) Wieviel Ruthen haben alle Menschen überhaupt gegraben? Fac. 1614 Ruthen.

2) Wieviel Ruthen hat 1 Mann im Durchschnitte gegraben? Fac. $76\frac{6}{7}$ R.

3) Wieviel Wochen hat jeder Mensch im Durchschnitt gearbeitet? Fac. $3\frac{1}{14}$ W.

4) Wieviel Ruthen hat 1 Mensch im Durchschnitte in 1 Woche gegraben? Fac. $25\frac{1}{43}$ R.

Mensch.	Wochen	Ruthen	Produkt
8 Mann	— 5 —	a Tag — 5 —	200 R.
10 Frauen	— 2 —	a Tag — 3 —	60 =
3 Kinder	— $\frac{1}{2}$ —	a Tag — 2 —	9 =
21 Mensch.	$3\frac{1}{14}$ W.		269 R. 6 = 1614

Weil die Menschen Wochen gearbeitet haben, die Arbeit aber in Tagen bestimmt ist; so darf man nur, weil eine Woche 6 Arbeitstage hat, 269 durch 6 multipliciren, um in 1614 Ruthen die ganze Arbeit aller 21 Menschen zu erhalten.

1614 durch 21 dividirt, giebt $76\frac{6}{7}$ Ruthen, als die Antwort auf die 2te Frage.

Die dritte Frage enthält blos Menschen und Wochen, daher

Menschen	Woch.	
8	— 5	— 40 Wochen
10	— 2	— 20 =
3	— $\frac{1}{2}$	— $4\frac{1}{2}$ =
21 M.		$64\frac{1}{2}$ Woche.

Der 3ten Frage geschiehet ein Genüge, wenn $64\frac{1}{2}$ durch 21 dividirt wird, giebt $3\frac{1}{14}$ Wochen.

Durch die Kettenregel wird die vierte Frage beantwortet.

1 R. — { 1 M. / 1 W.

21 M. / $3\frac{1}{14}$ W. } — 1614 R. Fac. $25\frac{1}{41}$ R.

34) Man nimmt zu einer Medicin 3 Quentgen, von welcher 1 Pfund 4 Thlr. kostet, 2 Quentg. a Pf. 3 Thlr. 1 Quentg. a Pfund 10 Thlr. Wie hoch kömmt alles? wie hoch 1 Quentgen?

3 Quentg.	—	a Pfund	—	4 Thlr.	—	12	Thlr.
2 "	—	a Pfund	—	3 "	—	6	"
1 "	—	a Pfund	—	10 "	—	10	"
6 Quentg.						28	Thlr.

1 Gr.	— —	6 Quentg.	
6 Pfund	— —	28 Thlr.	
1 Thlr.	— —	36 Gr.	
32 Loth	— —	1 Pfund	
4 Quentg.	— —	1 Loth	1 Fac. $7\frac{7}{8}$ Gr.

1 Gr.	— —	1 Quentg.	
6 Pfund	— —	28 Thlr.	
32 Loth	— —	1 Pfund	
4 Quentg.	— —	1 Loth	
1 Thlr.	— —	36 Gr.	2 Fac. $1\frac{5}{18}$ Gr.

35) Man ist 310 Thlr. in Louisd'or schuldig, und bezahlt in folgenden Geldsorten, welche besser als Ld'r sind.

1) Wieviel beträgt die sämmtliche Agio? Fac. $19\frac{41}{50}$ Thlr.

2) Wieviel die Agio auf 100? Fac. $\frac{1}{283}$ Thlr.

3) Wieviel bleibt Rest? Fac. $7\frac{9}{50}$ Thlr.

Thlr.	besser	Produkt
53 Ducaten	— 4 Pc.	— 212 Thlr.
90 Cassenm.	— 7 Pc.	— 630 =
800 Gulden	— 9 Pc.	— 900 =
40 Goldg.	— 6 Pc.	— 240 =
283 Thlr.		1982 Thlr.

1 Agio — 283 Thlr.
28300 — 1982 Thlr. Agio 1 F. $19\frac{41}{70}$ Th.

1 Thlr. Agio — 100 Thlr.
28300 Thlr. — 1982 Agio. 2 F. $7\frac{1}{283}$ Thlr.

36) Man hat 800 Thlr. zu 4 Procent auf 7 Monate, 66 Thlr. zu 5 Procent auf 3 Jahre, 200 Thl. zu 6 Procent auf $\frac{1}{2}$ Jahr belegt; wieviel ist die sämmtliche Zinse?

800 Thlr.	— 4 Pr.	— 7 Mon.	— 22400 Thlr.
66 =	— 5 =	— 36 =	— 11880 =
200 =	— 6 =	— 6 =	— 7200 =
1066 Thlr.			41480 Thlr.

Weil die Zinsen auf 100, und nicht auf einzelne Thlr.; ferner weil die Zinsen jährlich und nicht monatlich bestimmt sind; im Exempel sich aber einzelne Thl. und Monate befinden; so ist die Summe der Produkte die Zinse von so vielen 100 Thlrn. als die Summe der ersten Columne, und in so viel Jahren als Monate im Durchschnitte sind.

1 Zinse — { 1066 Thlr. / Mon.
106600 Thlr. / Jahren } — 41480 Thlr. Z.
12 Mon. — 1 Jahr. F $34\frac{17}{30}$ Thlr.

37) Man will 16 Ellen Leinewand a 6 Gr. 5 Himten Korn a 1 Thlr., 12 Pfund Coffee a 9 Gr. gegen Zucker a Pfund 8 Gr. vertauschen; wie viele Pfund Zucker bekömmt man für alles?

16	— a —	$\frac{1}{2}$	Thlr.	—	$2\frac{2}{3}$	Thlr.
5	— a —	1	"	—	5	"
12	— a —	$\frac{1}{4}$	"	—	3	"
					$10\frac{2}{3}$	Thlr.

Man weis schon, daß wenn Größen gegen einander vertauscht werden sollen, daß alles, was zu der einem Sache gehört, z. E. die Sache mit ihrem Werthe, mit einander in eine Columne der Kettenregel komme. Da nun in der Summe der Produkte $10\frac{2}{3}$ die ganze Waare, mit ihrem Werthe vereinigt ist, so macht dieses eine Columne, und die Sache, welche dargegen vertauscht werden soll, mit ihrem Werthe die andere Columne aus.

1 Pfund Zuck. 8 Gr	}	—	$10\frac{2}{3}$ Thlr.
1 Thlr.		—	36 Gr. Fac. 48 Pfund.

38) Sind die gegebenen Zahlen nicht durch die Einheit bestimmt, so muß jeder Posten besonders durch die Kettenregal berechnet werden.

Eine Wassermühle mahlt in 5 Stunden 8 Himten; eine Windmühle in $\frac{1}{2}$ Stunde $\frac{5}{8}$ Himten; eine Handmühle in 6 Stunden 4 Himten; nun gehet die Massermühle 3 Tage, die Windmühle 5 Tage, die Handmühle 7 Tage. Welche Mühle hat das mehreste Mehl geliefert? oder wieviel Mehl hat jede gemacht?

Wasser-

Waſſermühle

1 Himt. — — 3 Tage
5 Stund. — — 8 H.
1 Tag — — 24 St.

Fac. $115\frac{1}{5}$ Himt.

Windmühle

1 Himt. — — 5 T.
$\frac{1}{2}$ St. — — $\frac{5}{8}$ H.
1 Tag — — 24 St.

Fac. 150 Himt.

Handmühle.

1 Himt. — — 7 Tage
6 Stund. — — 4 Himt.
1 Tag — — 24 Stund.

Fac. 112 Himt.

39) Wieviel Mehl werden dieſe drey Mühlen in 10 Tagen machen?

1 Himt. — — 10 T.
5 St. — — 8 H.
1 Tag — — 24 St.

Fac. 384 Himt.

1 Himt. — — 10 T.
$\frac{1}{2}$ St. — — $\frac{5}{8}$ H.
1 Tag — — 24 St.

Fac. 300 Himt.

1 Himt. — — 10 Tage
6 St. — — 4 Himten
1 Tag — — 24 Stunden

Fac. 160 Himten.

Die Summe der Facitte zeigt, daß ſie alle in 10 Tagen 844 Himten machen.

Wenn Länge und Breite durch einander multiplicirt, die Fläche; oder Länge, Breite, und Dicke durch einander multiplicirt, den körperlichen Innhalt geben ſoll; ſo müſſen es viereckte Flächen oder Körper ſeyn. Laufen ſie aber ſpitzig zu, ſo nimmt man das Maas der Breite, oder der Breite und Dicke, in der Mitte ihrer Länge; oder man addirt die gröſſeſte und kleinſte Seite, oder Fläche, und halbirt die Summe. Z. E. ein Feld wäre lang 20 Ruthen, an einem Ende breit

6 Ruthen, am andern 9 Ruthen, so wäre die gleiche Breite dieses Feldes $15/2$ Ruthen, oder $7\frac{1}{2}$ Ruthe, folglich die Fläche 150 Quadratruthen.

Ein Feld das 10 Ruthen lang ist, läuft ganz spitzig, in Form eines rechtwinklichten Triangels zu, das eine Ende sey breit 4 Ruthen, das andere ist breit 0 Ruthen, folglich ist die durchgängige Breite 2 Ruthen, also die Fläche 20 Quadratruthen.

Obgleich die 4 Species mit Flächen und Körpern, völlig aus dem, was gesagt ist, fließen; so mögen demohngeachtet noch ein paar Exempel, in den 4 Rechnungsarten folgen.

40) Wie viele Morgen halten folgende Felder?

lang		breit		
30 Ruth.	—	14 Ruth.	—	420 Ruth.
100 "	—	37 "	—	3700 "
16 "	—	10 "	—	160 "
27 "	—	12 "	—	324 "
				4604 Quadr. R.

1 M. — — 4604 R.
120 R. — — 1 M. Fac. $38\frac{11}{30}$ M.

41) Wie viele Cubicfuß halten folgende 4 Balken?

lang		breit		dick		
32 Fuß	—	5 Fuß	—	$\frac{1}{2}$ Fuß	—	80
10 "	—	3 "	—	2 "	—	60
$\frac{11}{12}$ "	—	$\frac{1}{3}$ "	—	$\frac{1}{6}$ "	—	$\frac{11}{216}$
16 "	—	2 "	—	$\frac{5}{12}$ "	—	$13\frac{1}{3}$
						Fac. $153\frac{83}{216}$

42) Von folgenden vier Feldern wird ein Stück genommen, das 33 Ruthen lang, 24 Ruthen breit ist; wieviel bleibt Rest?

lang

lang		breit		
10 R.	—	7 R.	—	70
100 =	—	12 =	—	1200
9 =	—	3 =	—	27
14 =	—	2 =	—	28
				1325
Subtr.	33 . 24	=		792
		Rest		533

43) Man hat einen viereckten Haufen Gartenerde, der 20 Ellen lang, 16 Ellen breit, 10 Ellen hoch ist; von solchem sollen folgende Kasten gefüllet werden. Wieviel Erde bleibt übrig, oder wieviel fehlt?

20 Ell. 16 Ell. 10 Ell. — 3200

Kasten	lang		breit		tief		
10 St.	— a 2 Ell.	—	1 Ell.	—	$\frac{1}{2}$ Ell.	—	10 Ell.
100 =	— a 3 =	—	2 =	—	2 =	—	1200 =
2 =	— a 4 =	—	$1\frac{1}{2}$ =	—	1 =	—	12 =
1 =	— a 11 =	—	5 =	—	2 =	—	110 =
110 =	— a 4 =	—	2 =	—	$1\frac{1}{4}$ =	—	1100 =
						Summe	2432

3200
Subtr. 2432
Rest 768 Cubikellen bleiben übrig.

44) Wie viele Cubicfuß erhält man, wenn folgende zwey Bohlen durch 3 multiplicirt werden.

11 Fuß	— 6 Fuß	— $\frac{1}{3}$ Fuß	— 22 Fuß
18 =	— 2 =	— $\frac{1}{2}$ =	— 18 =
			40 Fuß
			3
			Fac. 120 Fuß.

45) Folgende vier Felder sollen unter fünf Personen gleich getheilt werden; wieviel Ruthen bekömmt ein jeder?

lang		breit		
17 R.	—	$3\frac{1}{2}$ R.	—	$59\frac{1}{2}$
50 =	—	8 =	—	400
100 =	—	37 =	—	3700
27 =	—	1 =	—	27

$4186\frac{1}{2}$ ist Fac. $837\frac{3}{10}$ R.

5

Soll der Inhalt eines runden Körpers, z. E. eines Stammes vom Baume gefunden werden; so multiplicire man die Zirkelfläche der Dicke, mit der Länge des Stammes, das Produkt ist der körperliche Inhalt. Man findet aber die Zirkelfläche nach dem 163 und 164sten Exempel der Kettenregel. Oder, weil sich die Fläche des Quadrats des Durchmessers eines Zirkels, zur Zirkelfläche, wie 14 zu 11 verhält; so multiplicire man die Dicke des Stammes, welche in der Mitte der Länge des Stammes genommen wird, durch sich selbst. Hierdurch erhält man das Quadrat des Durchmessers. Nun giebt das Verhältnis 14 zu 11, durch Hülfe der Kettenregel, die Größe der Zirkelfläche. Diese durch die Länge des Stammes multiplicirt, giebt den körperlichen Inhalt. Z. E.

Die Länge eines Stammes sey 10 Fuß, die Dicke 2 Fuß, so ist das Quadrat des Durchmessers 4 Fuß.

1 Zirkel	—	—	4 Fuß Quadr.
14 Quadr.	—	—	11 Zirk. Fac. $3\frac{1}{7}$ Fuß.

Diese Zirkelfläche $3\frac{1}{7}$ Fuß durch die Länge 10 multiplicirt, giebt den körperlichen Inhalt $31\frac{3}{7}$ Cubicfuß.

46) Ein

46) Ein Baum ist 10 Fuß lang, 2 Fuß dick, 2) 12 Fuß lang, $1\frac{1}{2}$ Fuß dick, 3) 6 Fuß lang, 1 Fuß dick; wie viele Cubicfuß halten alle drey Bäume? Man nehme die Dicke der Bäume, als die Dicke völlig viereckter Balken an; so hat man

Länge		Breite		Dicke		
10 Fuß	—	2 Fuß	—	2 Fuß	—	40
12 =	—	$1\frac{1}{2}$ =	—	$1\frac{1}{2}$ =	—	27
6 =	—	1 =	—	1 =	—	6
						73 Cub. F.

Nun wären alle drey Balken einem Balken gleich, der 73 Fuß lang, 1 Fuß breit, 1 Fuß dick ist. Weil aber die gegebenen Körper nicht viereckte Balken, sondern runde Bäume sind; so suche man die Zirkelfläche von 1 Fuß.

1 Zirkel	— —	1 Quadr.	
14 Quadr.	— —	11 Zirk.	Fac. $\frac{11}{14}$ Zirkelfläche

Diese Zirkelfläche durch die Länge 73 Fuß multiplicirt, giebt den Inhalt aller drey Bäume in $57\frac{5}{14}$ Cubicfuß.

Anhang.

Anhang.

Es war bereits die Handschrift des ersten Theils aus meinen Händen, als es mir nöthig schien noch verschiedenes hinzu zu fügen.

Von der abgekürzten Multiplication und Division mit Decimalbrüchen.

An einen unendlichen Decimalbruch, sollte noch ein Bruch gehangen werden, welcher denselben völlig richtig macht. Weil aber dieser Bruch aus der Acht gelassen wird, so fehlen bey der Multiplication diejenigen Produkte, welche der aus der Acht gelassene Bruch würde hervor gebracht haben. Dieser Mangel hat einen Einfluß auf die letzten Ziffern eines Decimalbruchs, und macht selbige unrichtig, es ist daher überflüßig, diese letzten Ziffern zu berechnen. Daher kann man sich folgender abgekürzten Multiplication bedienen.

Man fange gegen die gewöhnliche Ordnung an, mit der höchsten Ziffer des Multiplicators zu multipliciren, und fahre mit immer niedrigern Ziffern so lange fort, bis man das letzte Produkt, durch die letzte Ziffer des Multiplicators gemacht hat. Wenn man das Produkt mit der zwoten Decimalziffer des Multiplicators macht; so lasse man die letzte Decimalziffer des Multiplicandus unberechnet. Im Produkte einer jeden folgenden Ziffer des Multiplicators, lasse man nach und nach eine Ziffer mehr aus dem Multiplicandus weg. Z. E.

32, 41235	0, 3241
2, 35714	0, 5312
64, 82470	0,16205
9, 723705	972
1, 620615	32
226884	6
3241	Prod. 0,17215
1296	

Produkt 76,400441

$4\frac{3}{4}$ soll durch $\frac{3}{7}$ multiplicirt werden.

4, 75000	Probe
0, 42857	$4\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{57}{28} = 2,035714$
1, 900000	
95000	
38000	
2375	
329	

Prod. 2, 035704

Im letzten Exempel ist der ganze Multiplicandus durch die 4 des Multiplicators multiplicirt. Im zweyten Produkte ist eine Null, im dritten sind zwo Nullen u. s. w. aus der Acht gelassen. Das Comma wird im obersten Produkte wie gewöhnlich bestimmt.

Ehe die verkürzte Division gezeigt werden kann, muß ich der bequemsten Art mit Decimalbrüchen zu dividiren, erwehnen.

Man gebe dem Zehler oder Nenner, oder welches einerley ist, dem Dividendus oder Otvisor, welcher von beyden die wenigsten Decimalstellen hat, durch angehängte Nullen, so viele Decimalstellen, als die andere Zahl Decimalstellen hat. Nun streiche man die Commata weg, sehe die Brüche mit den Ganzen

als

als ganze Zahlen an, und dividire gewöhnlichermaßen. Die Ziffern des gefundenen Quotienten sind Ganze. Setzt man nun wie bekannt ist, die Rechnung durch angehängte Nullen am Reste, weiter fort, so ergiebt sich im Quotienten eine Decimalziffer nach der andern.

Denn dadurch, daß beyde Brüche gleiche Decimalstellen erhalten, erhalten sie gleiche Nenner. Sind aber die Nenner gleich, so kann man solche bey der Division aus der Acht lassen, und die Zehler als ganze Zahlen ansehen, weil sich Brüche gleicher Nenner gegen einander, wie ihre Zehler verhalten, und weil es bey der Division nicht auf die Größe der Zahlen, sondern auf ihr Verhältnis, welches sie gegen einander haben, ankömmt.

Fordert man einen Beweis, warum man in obigem Falle den Zehler mit der ganzen Zahl zusammen hängen dürfe; so weis man schon, wenn man einen unreinen Decimalbruch in einen unächten Bruch verwandeln will, daß man nur das Comma wegstreichen, und alsdann der ganzen Größe, den Nenner des Decimalbruchs zum Nenner geben dürfe. Z. E. 3,04 $= \frac{304}{100}$. Denn dies ist nichts anders, als eine gleiche Multiplication und Division der Ganzen, durch den Nenner des Bruchs. Die Multiplication geschiehet dadurch, daß man das Comma wegstreicht, weil hierdurch in dem gegebenen Falle, die drey Einer, in die Stelle der Hunderte versetzt werden. Sie werden aber wieder durch 100 dividirt, wenn man 304 zum Nenner 100 giebt. Und eine gleiche Multiplication und Division ändert den Werth einer Größe nicht.

3,7 soll durch 0,004 dividirt werden. Weil der Divisor drey, der Dividendus nur eine Decimalstelle hat; so hänge man diesen noch zwo Nullen an, und dividire 3700 durch 4, ist 925. Es steckt also 0,004 in 3,7 = 925 mal.

Es

Es ſoll 0,004 durch 3,7 dividirt werden. Man dividire daher 4 durch 3700. Der Quotient iſt $\frac{4}{3700}$ oder $\frac{1}{925}$. Dieſen Quotienten in einen Decimalbruch verwandelt, iſt er 0,00108 u. ſ. w.

Es ſoll 36 durch 30,007 dividirt werden. Weil der Dividendus keine, der Diviſor aber drey Decimalſtellen hat; ſo hänge man jenem drey Nullen an, ſtreiche nun das Comma weg, und dividire 36000 durch 30007. Der Quotient iſt 1,19 u. ſ. w. Wäre 36 der Diviſor, 30,007 der Dividendus; ſo würde der Quotient $\frac{30007}{36000}$ ſeyn, welcher nach Belieben in einen Decimalbruch verwandelt werden kann.

$0,03 : 0,22 = \frac{3}{22} = 0,136$ u. ſ. w.
$0,22 : 0,03 = 0,733$ u. ſ. w.

Die verkürzte Diviſion mit Decimalbrüchen, von welchen einer oder beyde nicht völlig richtig ſind, beſteht darinn, daß man, nachdem die Brüche durch angehängte Nullen gleiche Nenner erhalten haben, ſo oft die niedrigſte Ziffer des Diviſors wegläßt, als man nach der gewöhnlichen Art eine Null anhängen ſollte, oder man läßt, um die folgende Ziffer im Quotienten zu erhalten, die niedrigſte Ziffer vom Diviſor weg. Die beyden letzten Ziffern, welche aber von geringer Erheblichkeit ſind, können anders heraus kommen, als ſie durch angehängte Nullen gefunden werden. Den Grund dieſes Verfahrens hat man bey der verkürzten Multiplication geſehen.

$24\frac{4}{7}$ ſoll durch $2\frac{3}{5}$ dividirt werden.

$24\frac{4}{7} = 24,8$

242857

D. 10,21175

$2\frac{3}{7} = 2,42857$

2480000

242857

51430

48570

2860

2428

432

242

190

168

22

10

12

Um die erste Decimalziffer 2 zu finden, hätte dem Reste eine 0 angehangen werden sollen. Da man aber die verkürzte Division gebrauchen wollte; so ließ man statt dessen die 7 des Divisors weg; um die zwote, dritte, vierte Decimalziffer zu erhalten, wurden die 5, die 8, die 2 weggelassen. Uebrigens dividirt man wie gewöhnlich. Der Quotient würde 10,21176 geworden seyn, wenn er durch angehängte Nullen gefunden wäre.

$2\frac{3}{7}$ soll durch $24\frac{4}{7}$ dividirt werden.

2480000

0,097928

242857

223200

19657

17360

2297

2232

65

48

17

16

1

Weil

Weil der Divisor aus mehrern Ziffern als der Dividendus bestand; so hätte man, um die wirkliche Division möglich zu machen, dem Dividendus 2 Nullen anhängen sollen; statt dessen aber ließ man die zwo letzten Nullen des Divisors weg, und der Quotient erhielte die zwo Nullen u. s. w.

Um die Probe zu machen, wollen wir die gegebenen Brüche ungeändert dividiren, und den gefundenen Quotienten in einen Decimalbruch verwandeln.

$$2\tfrac{3}{7} : 24\tfrac{4}{15} = \tfrac{83}{868} = 0,097926$$

Anwendung der Decimalbrüche auf die Gegenstände im bürgerlichen Leben.

Die Decimalbrüche lassen sich alsdann bey einer jeden Division, die nicht aufgeht, mit Vortheil anwenden, wenn der überbliebene Rest aus vielen Ziffern besteht.

Man hänge hinter den Rest eine Nulle, und dividire nun diesen Rest durch den Divisor. Dis wiederhole man einigemal, wenn die Division nicht aufgeht. Die Ziffern, welche man erhält, sind Ziffern eines Decimalbruchs. Z. E.

765983 soll durch 52304 dividirt werden.

		765983
Divisor	52304	52304
Quotient	14,64	242943
		209216
	Rest	337270
		313824
		234460
		209216

Ohne Anwendung der Decimalbrüche würde der Quotient seyn $14\frac{337}{512}\frac{27}{304}$, da er jetzt ist: $14\frac{64}{100}$, die Differenz zwischen beyden beträgt nicht $\frac{1}{200}$ von der Einheit.

Dis Verfahren giebt der Einheit durch eine angehängte Nulle 10 Theile, da sie zuvor in so viele Theile getheilt war, als der Divisor Einheiten hat.

Denn der überbliebene Rest ist der Zehler eines Bruchs, dessen Nenner der Divisor ist. Hängt man nun sowol dem Zehler als auch dem Nenner eine Null an, so werden beyde Theile durch 10 multiplicirt, der Werth des Bruchs wird dadurch nicht verändert. Dividirt man nun sowol Nenner als Zehler durch den Divisor, so wird der Nenner 10, der Zehler bekömmt eine Größe von unveränderter Verhältniß gegen seinen Nenner. Es wäre aber überflüßig, diese Arbeit am Nenner zu verrichten, weil der multiplicirte Nenner aus den beyden Factoren 10 und den Nenner bestehen. Dividirt man nun durch den Nenner, so muß sich der andere Factor 10 zeigen. Dis weiß man, daher verrichte man nur die Arbeit am Zähler.

Daß man den Quotienten in 10, in 100, in 1000 Theilchens erhält, wenn man dem ersten Reste eine, zwo oder drey Nullen anhängt, und die Division durch den Nenner durch solche fortsetzt, ist kaum nöthig noch zu erinnern.

Der Vortheil besteht darinn, daß man den Nenner des alten Bruchs entweder ganz aus der Acht läßt, oder ihn doch in einer Rangzahl 10, 100, 1000 erhält, welche in der weitern Bearbeitung keine Mühe erfordert; und daß man einen Rest von vielen Ziffern durch einen Bruch von zwey oder drey Ziffern ausdrücken kann.

Stellte der Dividendus des gegebenen Exempels Thaler vor; so würde die Rechnung beschwerlich seyn, um den Rest $\frac{337}{512}\frac{27}{304}$ in Groschen und Pfennige ausgedrückt

drückt zu erhalten. Da man aus dem Decimalbruche $\frac{64}{100}$ leicht findet, daß der gesuchte Quotient 14 Thaler 23 Groschen $\frac{8}{27}$ Pfennig sey,

Wenn die Division aufgeht; so erhält man den Werth des überbliebenen Bruchs genau. Z. E.

470665 soll durch 188266 dividirt werden.

188266	470665
2, 5	376532
	941330
	941330
	0

Der Quotient würde $2\frac{94133}{188266}$ gewesen seyn, da er jetzt genau 2, 5 ist.

Wenn nicht die äußerste Richtigkeit gefordert wird, so kann man sich der Decimalbrüche mit großem Vortheile bedienen, wenn sich reine oder unreine Brüche von vielen Ziffern unter den Gliedern der Kettenregel befinden. Um aber einen Fehler, der beträchtlich werden kann, zu vermeiden, hat man folgendes zu beobachten.

Es ist zwar ein geringes, die Unrichtigkeit eines Decimalbruchs, der sich nicht genau ausdrücken läßt, zu bestimmen, da man weiß, daß die 1ste, 2te, 3te Decimalziffer schon die Zehntheil, die Hundertheil, die Tausendtheil von der Einheit des Quotienten enthält, so daß der Fehler eines durch vier Ziffern ausgedrückten Decimalbruches nie den zehntausendsten Theil von der Einheit betragen kann. Und will man den Unterschied zwischen dem Bruche und der Wahrheit genau wissen, so darf man nur der letzten Decimalziffer einen Bruch anhängen, dessen Zähler der Rest und dessen Nenner der Divisor mit so viel Nullen ist, als der Bruch Decimalstellen hat. Z. E. $\frac{1}{3} = 0, 333\frac{1}{1000}$; dieser Bruch ist die Differenz.

Allein, wenn ein unendlicher Decimalbruch durch Multipliciren oder Dividiren weiter bearbeitet wird; so kann der Fehler noch weit geringer, er kann aber auch weit beträchtlicher werden.

In der Multiplication wird der Fehler geringer, wenn sie durch einen Bruch geschieht, und zwar um desto geringer, je unbeträchtlicher dieser multiplicirende Bruch ist. Denn die Multiplication mit einem Bruche ist eine wirkliche Division, welche mit dem Bruche auch den Fehler verkleinert.

In diesem Falle ist es oft hinlänglich, wenn der Bruch nur durch eine einzige Decimalziffer ausgedrückt wird. Z. E. $4\frac{1}{3}$ soll durch $\frac{1}{1000}$ multiplicirt werden, oder 4,3 . 0,001 das Produkt ist 0,0043, die Unrichtigkeit beträgt im Produkte nur den dreyßigtausendsten Theil einer Einheit, da sie in dem Ausdrucke 4,3 betrug $\frac{1}{10}$.

Wird hingegen ein nicht genau ausgedrückter Decimalbruch durch eine ganze Zahl multiplicirt; so wächst mit dem Bruche auch die Unrichtigkeit. Ein Bruch, der von der Wahrheit um $\frac{1}{100}$ der Einheit verschieden ist, wird, wenn er durch 100 multiplicirt wird, einen Fehler von einer ganzen Einheit zeigen. In diesem Falle wird man, wenn man sich hier der Decimalbrüche bedienen will, den Bruch durch desto mehr Decimalziffern ausdrücken müssen, je größer der andere Factor ist.

Die Unrichtigkeit eines unendlichen Bruchs wird sich vermindern, wenn er durch eine ganze Zahl oder durch einen größern Bruch dividirt wird; und sich vermehren, wenn er eine ganze Zahl oder einen größern Bruch dividirt. Denn im ersten Falle wird der Fehler mit dividirt, im andern Falle steckt der Fehler so oft im Quotienten, als der Divisor im Dividendus enthalten ist. Bey der Division kömmt es mehr auf den Fehler

des Divisors an; die Unrichtigkeit des Dividendus ist von weniger Erheblichkeit. Ein geringes Nachdenken wird einem jeden selbst sagen, ob die weitere Bearbeitung eines nicht völlig richtigen Decimalbruchs den Fehler größer oder kleiner macht. Im ersten Falle wird man den Bruch durch mehrere Decimalziffern ausdrücken müssen, wenn der Fehler nicht beträchtlich werden soll.

Decimalbrüche auf die Kettenregel anzuwenden, verfährt man folgendermaßen:

Man verwandle die vielzifrichten Brüche in Decimalbrüche; streiche nun die Commata weg; verkleinere, was sich mit Nutzen verkleinern läßt; und verfahre wie gewöhnlich. Ueberhaupt wenn man den Nenner eines Bruchs in die gegenseitige Columne wirft; so ist der Zehler, oder der Zehler mit den Ganzen, als eine ganze Zahl zu behandeln.

Man erhält für 860 Thaler $3262\frac{3658}{4321}$ Pfund; wieviel Groschen kosten 12 Loth?

Wollte man diese Aufgabe nach der gewöhnlichen Art berechnen; so würde das Einrichten des Bruchs eine beschwerliche Multiplication erfordern, deren Produkt eine Zahl von 8 Ziffern geben würde, und man behielte im Nenner die Zahl 4321, welche die Arbeit noch weitläuftiger machte.

Um diese Arbeit beträchtlich zu vermindern, drücke man den Bruch durch den Decimalbruch 85 aus, hänge diesen Bruch mit der ganzen Zahl zusammen, nachdem man den Nenner 100 in die gegenseitige Columne geworfen hat. Das Exempel steht nun also:

1 Gr.	—	12 Loth
326285 Pf.	—	860 Thlr.
1 Thlr.	—	36 Gr.
32 Loth	—	1 Pfund
	100 Fac.	$3\frac{182145}{326285}$ Groschen.

Wieviel Pfund erhält man für $923\frac{406}{729}$ Thaler, wenn man für $332\frac{94}{421}$ Thaler $80\frac{1}{2}$ Pfund erhält?

Weil der unreine Bruch $80\frac{1}{2}$ nach der gewöhnlichen Bearbeitung wenig Mühe erfordert; so verwandle man nur die beyden übrigen Brüche in Decimalbrüche, und verfahre wie gezeigt ist.

1 Pf. — 92376 Thlr.
33222 Thlr. — $80\frac{1}{2}$ Pfund
100 100 Fac. $223\frac{27762}{33222}$ Pfund

Wenn sich Größen, deren Theile durch die Addition mit einander verbunden sind, unter den Gliedern der Kettenregel befinden, und die größeste Sorte besteht aus vielen Ziffern; so sind Decimalbrüche mit Nutzen zu gebrauchen. Z. E. Ein Glied sey 367 Thlr. 17 Gr. 5 Pfennige.

Will man sich der Decimalbrüche bedienen; so bringe man alle Theile auf den Namen der größesten Sorte. Oder eigentlich, man drücke die kleinern Theile durch einen Bruch der größesten Sorte aus. Dieses geschieht am bequemsten durch die Kettenregel. Man sagt nämlich: Wieviel Thaler sind 17 Groschen 5 Pfennige oder $17\frac{5}{12}$ Groschen, wenn 1 Thaler 36 Groschen hat?

1 Thlr. — — $17\frac{5}{12}$ Gr.
36 Gr. — — 1 Thlr. Fac. $\frac{141}{288}$ Thlr.

Diesen gefundenen Bruch drücke man durch den Decimalbruch 0,49 aus, und hänge ihn mit der ganzen Zahl zusammen, so hat man 367,49 oder $\frac{36749}{100}$ Thaler statt 367 Thaler 17 Groschen 5 Pfennige. Die Unrichtigkeit, welche der Decimalbruch verursacht, beträgt hier den sechsten Theil eines Pfennigs.

Man will die Größe 922 Pfund 11 Loth 3 Quentgen 1 Oertgen durch einen Decimalbruch der Pfunde ausdrücken.

Die

Die Quentgen und Oertgen bringe man zuerſt durch die Kettenregel weg; man mache ſie zu Lothen.

1 Loth	—	—	$3\frac{1}{4}$ Quentg.
4 Quentg.	—	—	1 Loth. Fac. $\frac{13}{16}$ Loth.

Nun mache man die Lothe auf gleiche Art zum Bruche der Pfunde.

1 Pf.	—	—	$11\frac{13}{16}$ Loth
32 Loth	—	—	1 Pf. Fac. $\frac{187}{711}$ Pf.

Dieſen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, giebt 0,37; die Gröſſe 922 Pfund 11 Loth 3 Quentgen 1 Oertgen iſt alſo gleich 922,37 Pfund oder $\frac{92237}{100}$ Pfund. An der völligen Richtigkeit fehlt nicht der achte Theil eines Quentgens.

Es wird aber dieſe Differenz gefunden, wenn die erhaltenen $\frac{37}{100}$ Pfund durch die Kettenregel zu Loth, Quentgen und Oertgen gemacht werden.

Wieviel Thaler koſten $\frac{3847}{71223}$ Orthoft Wein, wenn $\frac{233}{12217}$ Orthoft koſten 29 Thaler 23 Groſchen 4 Pfennige?

Die Bearbeitung dieſer Aufgabe würde nach der gewöhnlichen Bearbeitung weitläuftig werden. Man drücke alſo, um dieſe Weitläuftigkeit zu vermindern, alle Glieder durch Decimalbrüche aus; nun ſteht das Exempel ſo:

1 Thlr.	—	—	0,74 Orh.
0,75 Orh.	—	—	29,65 Thlr.
100	—	—	100
100	—	—	Fac. $28\frac{101}{7180}$ Thlr.

Die unbeträchtlichen Differenzen, welche die Decimalbrüche verurſachen, laſſen ſich durch Vernunftſchlüſſe noch unbeträchtlicher machen. Iſt der Reſt, welchen man bey Beſtimmung der Decimalziffern aus der Acht läßt, gröſſer, als die Hälfte des Diviſors; ſo kömmt

man der Wahrheit näher, wenn man die letzte Ziffer des Decimalbruchs um eine Einheit größer annimmt. Drückt man zwo Größen in einer Columne der Kettenregel durch Decimalbrüche aus, und läßt bey einem derselben einen Rest aus der Acht; so kann man dis einigermaßen dadurch ersetzen, wenn man die letzte Decimalziffer des zweyten Bruchs um 1 größer annimmt. Läßt man bey den Brüchen der zwoten Columne einen Rest aus der Acht, so muß auch bey dem Bruche der Theilcolumne der Rest aus der Acht gelassen werden.

Aus dem, was gesagt ist, sieht man schon, wie groß der Nutzen sey, welchen die Decimalbrüche in den Geschäfften des bürgerlichen Lebens verschaffen. Dieser Nutzen wird in der Addition und Subtraction der Brüche noch weit beträchtlicher. Wie oft entstehen nicht Brüche von vielen Ziffern? Sollen diese addirt oder subtrahirt werden, so geräth man, wenn nicht ein glückliches Ohngefähr eine Verkleinerung derselben verstattet, in eine unangenehme Weitläuftigkeit, welche verursacht, daß man am Ende der Arbeit ungewiß ist, ob sich in dieser weitläuftigen Arbeit nicht ein Fehler eingeschlichen habe. Zum Beyspiele will ich nur folgende fünf Brüche wählen, welche addirt werden sollen. $\frac{377}{431} + 9\frac{623}{753} + \frac{863}{1235} + \frac{469}{531} + \frac{112}{143}$.

Wollte man diese Brüche nach der gewöhnlichen Art addiren; so würde man einen Generalnenner von funfzehn Ziffern erhalten Zu diesem Nenner müßten nun die neuen Zehler von nicht weniger Ziffern gesucht werden, ehe die Addition der Zehler statt fände. Um diese Weitläuftigkeit zu vermeiden, wollen wir die Brüche in Decimalbrüche verwandeln; sie sind diese: 0,874 + 9,827 + 0,698 + 0,883 + 0,783. Diese Brüche addirt, giebt die Summe 13,065. Hätte man sich der Decimalbrüche nicht bedient; so würden Stunden

den nothwendig gewesen seyn, um die Summe zu erhalten, welche jetzt in ein Paar Minuten gefunden ist.

Die Unrichtigkeit, welche die Decimalbrüche hier verursachen, ist unbeträchtlich, da die Brüche schon in 1000 Theilchens bestimmt sind, sie würde noch viel unbeträchtlicher seyn, wenn man sie durch vier Decimalziffern ausgedrückt hätte. Ueberhaupt ist es bey der Addition und Subtraction rathsam, die gegebenen Posten durch nicht zu wenige Decimalziffern auszudrücken, weil die Berechnung einer Ziffer mehr, hier einen geringen Unterschied der Arbeit verursacht. Bey der Multiplication und Division aber ist der Unterschied von Einer Ziffer mehr schon beträchtlich.

Ein Exempel der Subtraction sey dieses: von $7\frac{13972}{42421}$ soll $5\frac{8733}{9212}$ subtrahirt werden.

Man versuche es, den Rest, ohne Hülfe der Decimalbrüche zu liefern, gewiß man wird schon in dieser kleinen Aufgabe die wohlthätige Hülfe der Decimalbrüche schätzen lernen. Die Decimalbrüche sind

	7,329
	5,948
Rest	1,381

Der Decimalbruch 0,325 ist gleich $\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$ und die Summe der ganzen unendlichen Reihe eines unendlichen Bruchs ist dem Bruche gleich, welchen man durch einen Decimalbruch ausdrücken will. Z. E. $\frac{1}{3}=0,33333$ u. s. w. Hieraus folgt; daß eine jede mehr berechnete Decimalziffer den gefundenen Quotienten der Wahrheit näher bringt.

Ganz anders verhält es sich mit den gewöhnlichen Brüchen. $\frac{325}{720}$ ist nicht $\frac{300}{700}+\frac{20}{20}+\frac{5}{6}$. Man streiche vom Zehler und Nenner eines gewöhnlichen Bruchs gleich viele der letzten Ziffern weg, der Werth des Bruchs

kann hierdurch kleiner, er kann aber auch größer werden, und oft verändert sich der Werth des Bruchs durch die weggestrichnen Ziffern nicht. Folgende Exempel bestätigen dieses.

Streicht man die zwo letzten Ziffern des Bruchs $\frac{199}{401}$ aus dem Nenner und Zehler weg; so hat man $\frac{1}{4}$. Bringt man diesen Bruch mit dem gegebenen Bruche zu gleicher Benennung, so zeigt sich, daß $\frac{1}{4}$ beträchtlich kleiner als $\frac{199}{401}$ sey.

$$\frac{199}{401} = \frac{796}{1604} \qquad \frac{1}{4} = \frac{401}{1604}$$

Streicht man aus dem Bruche $\frac{201}{399}$ die letzten Ziffern vom Nenner und Zehler weg; so wird durch jede im Nenner und Zehler weggestrichene Ziffer der Werth des Bruchs größer.

$$\frac{201}{399} = \frac{2613}{5187}$$
$$\frac{20}{39} = \frac{2660}{5187}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{3458}{5187}$$

Streicht man aus dem Bruche $\frac{1423}{2846}$ und den beyden andern Brüchen, eine gleiche Anzahl Ziffern vom Zehler und Nenner, es mögen die ersten oder die letzten seyn, weg; so wird dadurch der Werth des Bruchs nicht verändert.

$\frac{1423}{2846} = \frac{1}{2}$	$\frac{246}{369} = \frac{2}{3}$	$\frac{307}{921} = \frac{1}{3}$
$\frac{142}{284} = \frac{1}{2}$	$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$	$\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$
$\frac{14}{28} = \frac{1}{2}$	$\frac{46}{69} = \frac{2}{3}$	$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Man sieht leicht, wenn der weggestrichne Zehler gegen den weggestrichenen Nenner größer als der Zehler des überbliebenen Bruchs gegen seinen Nenner ist; daß alsdann der Bruch kleiner werde; daß er hingegen größer werde, wenn der weggestrichene Zehler gegen seinen Nenner kleiner als der überbliebne Zehler gegen

seinen

seinen Nenner ist; und daß der Werth des Bruchs unverändert bleibe, wenn die Nenner und Zehler der weggestrichnen Brüche sich gegen einander, wie sich Zehler und Nenner des überbliebenen Bruchs gegen einander verhalten. Denn je kleiner der Zehler gegen seinen Nenner ist, um desto größer ist der Bruch.

Weil sich in der Division mit Brüchen solche Fälle finden, die in Verlegenheit setzen können; so will ich hiervon noch ein Paar Worte sagen.

Man weiß schon, daß die Division in Brüchen durch die Kettenregel deswegen vorzüglich ist; weil man hier den Quotienten im kleinsten Ausdrucke erhält; weil sie leicht ist, und weil hier kein Irrthum zu besorgen ist.

Man schreibe den Divisor unter den Dividendus, wie man einen Bruch schreibt. Da nun ein jeder Nenner seinen Zehler und die Theilcolumne der Kettenregel die zwote dividirt; so erhält nothwendig der Nenner seinen Platz in der Theil- der Zehler in der andern Columne. Z. E. $\frac{3}{4}$ soll durch den siebenten Theil von 5 dividirt werden. Der Zehler ist $\frac{3}{4}$, der Nenner $\frac{5}{7}$ also:

T $\frac{5}{7}$ — $\frac{3}{4}$ Q. $\frac{21}{20}$ = I $\frac{1}{20}$

Man soll den dritten Theil von 2 durch den vierten Theil von 3 dividiren, oder $\left\{\begin{matrix}\frac{2}{3} & \text{T} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\ \frac{2}{3}\ \text{Q.}\ \frac{8}{9}\end{matrix}\right.$

Diese und dergleichen Fälle sind bereits vorne vorgetragen. Wenn aber eine Aufgabe so beschaffen ist, daß der Zehler oder der Nenner ein unregelmäßiger, ein doppelter Bruch wird; alsdann ist das gezeigte Verfahren allein nicht hinlänglich den Quotienten zu finden. Z. E. Man soll den vierten Theil von $\frac{2}{3}$ durch den 5ten Theil von $\frac{3}{4}$ dividiren. Hier besteht Zehler und Nenner aus einem doppelten Bruche. Der Zehler ist $\left\{\begin{matrix}\frac{2}{3} \\ \frac{3}{4}\end{matrix}\right.$, der Nenner $\left\{\begin{matrix}\frac{3}{4} \\ 5\end{matrix}\right.$. Man suche den Quotienten,

wie

wie oben gezeigt ist; sowol aus dem Zehler, als auch aus dem Nenner. Hierdurch erhält man einen Bruch, dessen Zehler $\frac{1}{2}$, dessen Nenner $\frac{3}{20}$ ist. Wird nun der Nenner $\frac{3}{20}$ in die Theil- der Zehler $\frac{1}{2}$ in die erste Columne der Kettenregel gesetzt, so giebt das Facit den gesuchten Quotienten $1\frac{1}{9}$.

Tafel zur Vergleichung der Fußmaße.

Der Amsterdamer Fuß	—	—		1253
Berner	—	—	—	$1309\frac{1}{13}$
Constantinopolitanische		—	—	3120
Cracauische	—	—	—	1580
Dänische	—	—	—	$1403\frac{2}{7}$
Alt-Griechische		—	—	1350
Alt-Hebräische		—	—	1590
Leidner	—	—	—	1390
Leipziger	—	—	—	1397
Lissaboner	—	—	—	1387
Londner	—	—	—	$1350\frac{1}{7}$
Nürnbergische	—	—	—	$1346\frac{3}{4}$
Pariser	—	—	—	1440
6 machen eine Toise.				
Pragische	—	—	—	1338
Rheinländische		—	—	$1391\frac{8}{10}$
Neu-Römische		—	—	1320
Alt-Römische	—	—	—	$1571\frac{9}{10}$
Rußische	—	—	—	$2385\frac{6}{7}$
Schwedische	—	—	—	1320
Spanische zu Toledo		—	—	$1206\frac{2}{3}$
Strasburger		—	—	$1282\frac{3}{4}$
Turinische	—	—	—	2270
Venetianische	—	—	—	1540
Wiener	—	—	—	1400

Der

Der Magiſtrat der Stadt Leipzig ſchaffte ſich die Gewichte der vornehmſten europäiſchen Oerter an. Der Herr von Clausberg verglich ſie gegen 1 Leipziger Pfund. Hieraus iſt folgende Tafel entſtanden.

In Leipzig hat ein Pfund 32 Loth, 1 Loth 4 Quentgen, 1 Quentgen 4 Pfenniggew. und 1 Pfenniggew. hat Herr von Clausberg in 15 Grän abgetheilt, daß alſo 1 Pf. 7680 Grän hält. Jedes Pfund der in nachſtehender Tabelle aufgeführten Städte wiegt nach dem Leipziger Gewichte an Pfund, Loth, Quentgen, Pfenniggew. und Grän ſo viel, als daneben angezeigt iſt.

Tafel zur Vergleichung der Gewichte.

	Nach dem Leipziger Gewichte.				
1 Pf. in Amſterdam wiegt	1 Pf.	1 Lt.	3 Q.	1 Pf.	10 Gr.
Antwerpen —	1 —	0 —	0 —	2 —	0 —
Archangel —	0 —	27 —	3 —	3 —	0 —
Achen —	1 —	0 —	0 —	2 —	0 —
Augsburg groß Gew.	1 —	1 —	2 —	3 —	3 —
dito klein Gew.	1 —	0 —	1 —	2 —	6 —
Bologna —	0 —	24 —	3 —	1 —	3 —
Botzen —	1 —	2 —	1 —	1 —	6 —
Brüſſel —	1 —	0 —	0 —	2 —	0 —
Breßlau —	0 —	27 —	3 —	0 —	7 —
Braunſchweig —	1 —	0 —	0 —	0 —	0 —
Berlin —	1 —	0 —	0 —	1 —	2 —
Bremen —	1 —	1 —	3 —	0 —	0 —
Bauzen —	0 —	29 —	2 —	3 —	5 —
Bourdeaux —	1 —	1 —	2 —	3 —	0 —
Conſtantinopel —	2 —	22 —	3 —	3 —	0 —
Cracau —	0 —	27 —	3 —	0 —	0 —
Cadix —	0 —	31 —	2 —	0 —	0 —
Cölln am Rhein —	1 —	0 —	0 —	0 —	0 —
Coppenhagen —	1 —	0 —	0 —	2 —	6 —

	Nach dem Leipziger Gewichte.							
1 Pf. in Danzig wiegt	0	Pf.	29	Lt.	3	Q.	1 Pf.	8 Gr.
Florenz —	0	—	23	—	1	—	0 —	1 —
Frankfurt am Mayn	1	—	0	—	0	—	0 —	3 —
Genua —	0	—	21	—	2	—	3 —	3 —
Genf —	1	—	5	—	3	—	1 —	0 —
Hamburg —	1	—	1	—	1	—	0 —	0 —
Königsberg alt Gew.	0	—	26	—	0	—	1 —	0 —
dito neu Gew.	1	—	0	—	0	—	1 —	0 —
London —	0	—	30	—	3	—	3 —	9 —
Lissabon —	0	—	31	—	1	—	3 —	7 —
Livorno —	0	—	23	—	1	—	1 —	10 —
Lucca —	0	—	22	—	3	—	1 —	13 —
Lion —	0	—	28	—	2	—	3 —	0 —
Lübeck —	1	—	1	—	0	—	2 —	0 —
Lüneburg —	1	—	1	—	1	—	1 —	5 —
Lindau —	0	—	31	—	1	—	3 —	10 —
Malaga —	0	—	31	—	2	—	0 —	0 —
Marseille —	0	—	28	—	1	—	1 —	8 —
München —	1	—	6	—	1	—	3 —	0 —
Memmingen —	1	—	3	—	0	—	1 —	7 —
Magdeburg —	1	—	0	—	0	—	1 —	0 —
Neapolis —	0	—	29	—	0	—	1 —	8 —
Nürnberg —	1	—	2	—	3	—	3 —	0 —
Paris —	1	—	1	—	2	—	1 —	10 —
Petersburg —	0	—	28	—	0	—	0 —	3 —
Prag —	1	—	3	—	0	—	3 —	5 —
Regensburg —	1	—	6	—	1	—	3 —	0 —
Riga —	0	—	28	—	2	—	2 —	8 —
Rom —	0	—	23	—	1	—	0 —	1 —
St. Gallen gr. Gew.	1	—	8	—	—	—	1 —	— —
dito klein Gew.	—	—	31	—	3	—	2 —	— —
Strasburg —	1	—	0	—	1	—	1 —	0 —
Schafhausen —	0	—	31	—	2	—	0 —	0 —
Salzburg —	1	—	6	—	1	—	2 —	0 —

Nach

Nach dem Leipziger Gewichte.

1 Pf. in Ulm wiegt	—	1 Pf. 0 L. 0 Q. 2 Pf. 0 Gr.
Venedig gr. Gew.	—	1 — 0 — 2 — 3 — 0 —
dito klein Gew.	—	0 — 20 — 2 — 2 — 9 —
Verona groß Gew.	—	1 — 2 — 0 — 1 — 5 —
dito klein Gew.	—	0 — 22 — 2 — 3 — 3 —
Wien	—	1 — 6 — 2 — 0 — 0 —
Warschau klein Gew.	—	0 — 25 — 3 — 2 — 5 —
Zürch	—	1 — 4 — 0 — 3 — 8 —
Zittau	—	1 — 0 — 0 — 1 — 0 —

Wenn der Amsterdamer Fuß nach der ersten Tabelle 1253 Theile hat, so hat der Cracauische 1580, der Leipziger 1397 solcher Theile. Es verhält sich daher der Amsterdamer Fuß zum Cracauischen wie 1253 zu 1580. Der Amsterdamer zum Leipziger Fuß wie 1253 zu 1397.

Auch die zwote Tabelle enthält die Verhältnisse der an den angezeigten Orten gebräuchlichen Pfunde gegen einander.

Man kann daher aus der einen oder der andern Tabelle durch die Kettenregel leicht finden, wieviel eine gegebene Anzahl in der Tabelle benamten Pfunde oder Fuß von einer jeden andern in der Tabelle benamten Pfunde oder Fuß betragen. Z. E.

Wieviel Wiener Pfund sind 360 Hamburger Pfund?

1 Pf. Wiener — 360 Pf. Hamb.

$33\frac{1}{4}$ Loth Hamb. — $38\frac{1}{2}$ Loth W. Fac. $416\frac{112}{113}$.

Wenn aber auch die Pfunde oder Fuß an einem Orte, der in der Tabelle nicht befindlich ist, mit den Pfunden oder Füßen eines in der Tabelle befindlichen Orts verglichen werden sollen; so ist dieses ebenfalls durch die Kettenregel zu erhalten, wenn man nur das Verhältniß zwischen den Pfunden oder Füßen eines Orts in der Tabelle kennet. Z. E.

Wieviel

Wieviel Amsterdamer Fuß sind 100 Hannöversche Fuß, wenn 10 Hannöversche Fuß 11 Pariser Fuß wären?

1 Amst. F. — 100 Hannöv. F.
10 Hannöv. F. 11 Paris.
1440 Paris. — 1253 Amsterd. Fac $9 \frac{103}{144}$.

Wieviel Pfund wiegt eine Bohle in Hannöverschen Gewichte, welche nach Venetianischen Maaße 3 Ruthen lang, 2 Fuß breit, 4 Zoll dick ist; da ein Cubicfuß Casselsches Maaß 10 Pfund Braunschweigisches Gewicht wiegt?

Man weiß nicht, wie sich Hannöverisches Gewicht gegen Braunschweigisches verhält, auch weiß man nicht, wie sich Casselsches Maaß gegen das Fußmaaß in Venedig verhält. Es wären aber 100 Bremer Pfunde 102 Hannöverischen Pfunden gleich, und 81 Venetianische Fuß wären 80 Berliner Fuß, 96 Berliner Fuß $95\frac{1}{2}$ Casselsche Fuß.

1 Pf. Hannöv. — 3 R. 2 F. 4 Z. } Venet. Maaß

1 F. 1 F. 1 F } Cassel. M. — 10 Pf. Braunschw.

32 Loth Braunschw. $33\frac{3}{4}$ Loth Bremer
100 Pf. Bremer — 102 Pf. Hannöv.
81 Venet. Fuß — 80 Berlin. Fuß
96 Berlin. Fuß — $95\frac{1}{2}$ Cassel. Fuß
1 R. — 16 Fuß
12 Zoll — 1 Fuß. Fac. $338\frac{11}{48}$ Pf.

In folgender Tabelle ist der Werth der Münzen in Louisd'or à 5 Thaler bestimmt. 1 Thaler ist zu 24 gute

gute Groschen, 1 guter Groschen zu 12 Pfennigen gerechnet.

Münzen.	Namen der Oerter.	Werth in Louisd'or.		
		Thl.	gGr.	Pf.
Achtehalber	Preußen	—	2	—
Albus	Cöln	—	—	$3\frac{3}{7}$
Albus	im Reiche	—	—	$6\frac{2}{7}$
Albertusthaler	Holland	1	$7\frac{1}{2}$–8	—
Altin	Rußland	—	—	10
Asper	Türkey	—	—	$1\frac{3}{4}$–2
Batzen	Franken	—	—	8
Batze	Schweiz	—	—	11–11$\frac{1}{2}$
Beslick	Türkey	—	—	9
Bidet	Frankreich	1	5 – 6	—
Blaffert	Cöln	—	1	$2\frac{2}{7}$
Carlino	Neapolis	—	2	7 – 8
Carlino	Rom	—	2	4 – 5
Carlino	Sicilien	—	1	4
Carolin	Schweden	—	9	4
Cavalato	Toscana	—	6	8
Chevalier d'or	Frankreich	7	6	—
Copeck	Rußland	—	—	3
Crone	Dännemark	—	9	$6\frac{3}{4}$
Crone	Engeland	1	11$\frac{1}{2}$–12	—
Crone	Frankreich	1	11$\frac{1}{2}$–12	—
Crusado novo	Portugal	—	17	4
Deut	Cleve	—	—	$\frac{1}{2}$
Deut	Holland	—	—	1
Ducat courant	Dännemark	2	6 – 7	—
Ducat	Holland	2	18–20	—
Ducat	im Reiche	2	18–20	—
Ducato correnti	Venedig	1	1 – 2	—

Münzen.	Namen der Oerter.	Werth in Louisd'or.		
		Thl.	gGr.	Pf.
Ducato di Banco	Venedig,	1	6 – 7	—
Ducato di Regno	Neapolis	1	1 ½ – 2	—
Ducato	Toscana	1	11 – 12	—
Ducate della Seta	Lucca	1	11 – 12	—
Ducado de Navarra	Spanien	1	9 – 9 ½	—
Ducaton	Holland	1	14 – 15	—
Ducaton	Niederlande	1	12 – 13	—
Ducaton	Mayland	1	15 – 16	—
Doblon	Spanien	5	1 – 2	—
Dobra	Portugal	21	16 – 18	—
Doppia	Genua	5	1 – 2	—
Doppia	Savoyen	7	5 – 5 ½	—
Doppia neue	Turin	7	5 – 5 ½	—
Doppia	Venedig	5	—	—
Dütgen oder Kaisergroschen	Preußen	—	—	9 ½
Escudo	Portugal	2	17 – 18	—
Escudo de Vellon	Spanien	—	16	—
Fanon	Pondicherie	—	2	—
Farthing	Engeland	—	—	2 – 2 ½
Filippo	Mayland	1	10	—
Flabbe	Holland	—	2	8
Fettmännichen	Cleve	—	—	1
Fledermaus	im Reiche	—	—	2
Genopina oder Scudi di argento	Genua	2	2 – 3	—
Goldgulden	Hannover	2	3 – 3 ½	—
— gestempelte	Holland	—	18 – 18 ½	—

Gold-

Münzen.	Namen der Oerter.	Werth in Louisd'or.		
		Thl.	gGr.	Pf.
Goldgulden ungestempelte	Holland	—	16 – 17	—
Goldgulden	Nürnberg	1	22½ – 23	—
Goldgulden	Rheinsche	2	1 – 2	—
Goldkronen	Frankreich	2	15	—
Grano	Neapolis	—	—	3
Griwe	Rußland	—	2	8½ – 9
Gröschel	im Reiche	—	—	½
Gröschel	Wien	—	—	2
Groschen, Kaiser-	im Reiche	—	—	9 – 9½
— Marien-	Braunschweig	—	—	8
Groot Flämsch	Holland	—	—	4¼
Groot	Bremen	—	—	4
Guinee	Engeland	6	8 – 10	—
Gulden	Basel	—	14	7 – 8
—	Bern	—	3	1 – 2
— Courant	Trieste	—	14	8
—	Holland	—	12 – 13	—
—	im Reiche	—	16	—
—	Ostfriesland	—	8 – 9	—
—	Pohlen	—	6½	—
—	Wien	—	15	3 – 4
— Courant	Zürich	—	14	7 – 8
Groschen	Pohlen	—	—	2⅗
Hapeny	Engeland	—	—	4 – 4½
Heller	Cöln	—	—	3/10
Heller	im Reiche	—	—	⅘
Imperiale	Rußland	12	13 – 14	—
Kaisergroschen	im Reiche	—	—	9 – 9½
Kopfstück	im Reiche	—	5	3
Kreuzer	im Reiche	—	—	3

Münzen.	Namen der Oerter.	Werth in Louisd'or.		
		Thl.	gGr	Pf.
Kupferthaler	Schweden	—	$2\frac{3}{4}$ – $3\frac{1}{4}$	—
Laubthaler	Frankreich	1	13 – 14	—
Lisbonnine	Portugal	8	4 – 5	—
Lira corrente	Modena	—	2	4
—	Mayland	—	$4\frac{1}{2}$ – 5	—
—	Lucca	—	$4\frac{1}{2}$	—
—	Toscana	—	$4\frac{3}{4}$ – 5	—
— corrent	Trieste	—	3	7 – 8
—	Parma	—	1	8 – 9
—	Venedig	—	3	3 – 4
Löwenthaler	Holland	1	2 – 3	—
Louisblanc wicht.	Frankreich	1	$8\frac{1}{2}$ – 9	—
— unwichtige	—	1	5 – 7	—
Livre	Frankreich	—	6	4
Livre	Lothringen	—	4 – $4\frac{1}{2}$	—
Lysd'ore	Frankreich	3	5 – 6	—
Mark	Dännemark	—	4	6 – 8
— Banco	Hamburg	—	11	2 – 6
— courant	Hamburg	—	9	1 – 4
—	Lübeck	—	9	1 – 4
— Silber-münze	Schweden	—	3	1 – 3
— Kupfer-münze	Schweden	—	—	10 – 12
Mattier	Braunschweig	—	1	4
Max d'or	Bayern	4	4 – 6	—
Mirleton	Frankreich	4	19 – 20	—
Noaillos d'or	Frankreich	9	4 – 5	—
Oehr, Kupfer-münze	Schweden	—	—	1 – $1\frac{1}{2}$
Oehr, Silberm.	Schweden	—	—	$4\frac{1}{2}$ – 5

Pagode

Münzen.	Namen der Oerter.	Werth in Louisd'or.		
		Thl.	gGr.	Pf.
Pagode	Pondicherie	2	10	—
Pagode.	Surate	2	9 = 10	—
Paolo	Rom	—	3	1 = 3
Paolo	Toscana	—	3	3 = 4
Pattagon	Genf	1	5 = 6	—
Pens Sterling	Engelland	—	—	$8\frac{1}{2}$ = 9
Permis Schilling	Brabant	—	3	8 = 10
Petermänchen				
großer	im Reiche	—	1	4
kleiner		—	—	5
Pfund Flämisch	Holland, Fland.	3	12 = 14	—
Pfund Sterling	Engelland	6	1 = 4	—
Pfenning	Hamburg	—	—	$\frac{2}{3}$
Pfenning	Würtemberg	—	—	$1\frac{1}{8}$
Piaster	Mocca arab.	1	2 = 4	—
Piaster	Türkey	—	17	6 = 8
Piastrino	Toscana	—	$7\frac{1}{2}$ = 8	—
Plappert	Schweitz	—	—	7
Poldrack	Danzig	—	—	4
Polturack	Pohlen	—	—	4
Polturat	Ungarn	—	—	5
Poltin	Rußland	—	12 = 14	—
Rappe	Schweitz	—	—	$1\frac{1}{8}$ = $1\frac{1}{4}$
Real de Plata				
Mexicana	Spanien	—	4	—
Real de Plata				
Provincial	Spanien	—	3	2 = 4
Real de Vellon	Spanien	—	1	7 = 8
Reichs Thlr.	Dännemark	1	3 = 4	—
— Banco	Hamburg	1	9 = 10	—
— courant	Hamburg	1	4 = $4\frac{1}{2}$	—

3rd Witness	Address for Letters	Hours to London	
		H.	M.
Brooke, Charles	Ashford	1	30
Brooke, Henry	Ashford	1	30
Brooke, Thomas	Ashford	1	30
Brown, Capt.	Plymouth	4	0
Brown, John	Plymouth	4	0
Bull, —	Hertford	1	0
Bunce, Mr.	Bristol	2	0
Burgess, Mr.	Bristol	2	0
Burgess, Mr. Bird	Bristol	2	0
Burgess, Mr. Bird, jun.	Bristol	2	0
Burnett, Mr.	Portsmouth	2	0
Burnett, Mr.	Portsmouth	2	0
Burnett, Mr.	Portsmouth

Münzen.	Namen der Oerter.	Werth in Louisd'or.		
		Thl.	gGr.	Pf.
Scudo della Croce	Venedig	1	14	—
Scudo d'oro	Lucca	1	14	—
— Silbermünze	Malta	1	1 : 2	—
— Kupfermünze	—	—	16	—
— d'oro	Toscana	1	14 : 15	—
— Moneta	Rom	1	8	—
Scudo Novo	Rom	1	8	—
— —	Savoyen	1	17 : 18	—
— —	Turin	1	17 : 18	—
Severin	Oster Niederlanden	8	8 : 10	—
Siebener	Oestereich	—	1	8
Siebzehner	— —	—	4	4
Silber Krone	— —	1	9 : 10	—
Six Pence.	England	—	$3\frac{1}{2}$	—
Soldo	Venedig	—	—	$1\frac{3}{4}$: 2
— corrente	Mayland	—	—	3
— di Lira	Toscana	—	—	$2\frac{3}{4}$: 3
Sonnen-Louisd'or	Frankreich	6	8	—
Sous	Frankreich	—	—	$3\frac{3}{4}$: 4
Sous	Genf	—	—	5
Stück von Achten	Spanien	1	8	—
Stüver	Cleve	—	—	5
— —	Holland	—	—	$7\frac{3}{4}$: 8
— —	Ostfriesland	—	—	$5\frac{1}{4}$: $5\frac{1}{8}$
Thaler	Pohlen	—	$19\frac{1}{2}$: 20	—
— Silbermünze	Schweden	—	10 : 1 $\frac{1}{2}$	—
— Kupfermünze	— —	—	3	3
Trojac	Pohlen	—	—	8
Witte	Mecklenburg	—	—	3
Witte	Ostfriesland	—	—	$\frac{1}{2}$
Zechine	Italien	2	18 : 20	—

Der

Der Gebrauch dieser Tabelle wird sich in ein Paar Exempeln zeigen.

Wie viele Guinee sind 1000 Mark Banco?

1 Guinee	— —	1000 Mk. Banco	
1 Mk. B.	— —	$11\frac{1}{2}$ gGr.	
$6\frac{1}{3}$ Thlr.	— —	1 Gu.	
24 gGr.	— —	1 Thlr.	F. $75\frac{25}{38}$ Guinee

600 braunschweigische Pfunde kosten 84 holländische Ducaten; wie viele Schillinge hamburger Courant kosten 10 Loth malaganisch Gewicht?

1 ß Courant	—	10 Loth Mallag.	
600 Pf. braunschw.	—	84 Ducat.	
7 Pfen.	—	1 ß Cour.	
1 Ducat.	—	$2\frac{3}{4}$ Thlr.	
1 Thlr.	—	24 gGr.	
1 gGr.	—	12 Pfen.	
$31\frac{1}{2}$ Loth Mallag.	—	1 Pf. br.	F. $5\frac{1}{35}$ ß Courant.

Ende des ersten Theils.

Der

Rechenkunst

zweyter Theil.

Die

Algebra

für das

gemeine Leben

---

von

N. Schmid.

Leipzig,
in der Dyckischen Buchhandlung,
1774.

Digitized by Google

Inhalt
des zweyten Theils.

I. Kap. Die Buchstaben-Rechnung.

1. Abschnitt. Vorläufige Bestimmungen. S. 329

2. Abschnitt. Vom Addiren. 333

3. Abschn. Vom Subtrahiren. 335

4. Abschn. Vom Multipliciren. 338

5. Abschn. Vom Dividiren. 344

6. Abschn. Von den Brüchen. 347

II. Kapitel. Von den Potenzen.

1. Abschn. Von den Potenzen. 349

2. Abschn. Vom Rechnen mit Potenzen. 352

III. Kap. Von Ausziehung der Wurzeln.

1. Abschn. Von der Quadratwurzel. 361

2. Abschn. Von der Cubicwurzel. 374

Inhalt.

IV. Kap. Von den Gleichungen und von Auflösen der Gleichungen. 387

V. Kap. Von der algebr. Auflösung der Aufgaben. 407

VI. Kap. Algebraische Aufgaben

1. Abschn. Vermischte Aufgaben. 416

2. Abschn. Aufgaben zur arithmetischen Progression 474

3. Abschn. Aufgaben zur geometrischen Progression 477

4. Abschn. Mathematische Aufgaben. 495

VII. Kap. Von unbestimmten Aufgaben.

1. Abschn. Von Aufgaben die zwo unbekannte Grösen enthalten, und eine Gleichung liefern. 503

2. Abschn. Aus zwo Gleichungen drey oder mehr unbekannte Grösen finden. 515

Erstes

Erstes Kapitel.

Die Buchstaben-Rechnung.

I. Abschnitt.

Vorläufige Bestimmungen.

§. 1.

Die Buchstabenrechnung ist eine Rechnungsart, in welcher man dasjenige, was mit den gegebenen und gesuchten Größen vorgenommen werden soll, durch Zeichen ausdrückt.

Man nennet sie deswegen die Buchstabenrechnung, weil man sich oft statt der Zahlen, der Buchstaben bedienet.

§. 2.

Was sich vermehren und vermindern läßt, ist eine Größe. Alle Zahlen sind daher Größen.

§. 3.

Die Zeichen, welcher man sich bedienet, sind folgende:

Zeichen der Gleichheit (=), 60 = Ein Schock. 60 ist gleich ein Schock.

Zeichen der Addition (+), 2 + 3 = 5; 2 und 3 sind gleich 5.

Zeichen der Subtraction (—), 6 — 2 = 4, 6 weniger 2 ist gleich 4.

Zeichen der Multiplication (X) oder (,) oder (.) oder man setzt die Größen, welche sich multipliciren sol-

len, ohne Zeichen bey einander. abc = a . b . c, d. i. a ist durch b, und dis Produkt wieder durch c multiplicirt.

Zeichen der Division (:), 6:3 = 2; oder, man schreibt den Divisor und den Dividendus als einen Bruch $\frac{6}{3} = 2$; beydes heißt: 6 dividirt durch 3 ist gleich 2.

§. 4.

Wenn mehr als zwo Größen, durch mehr als ein Gleichheitszeichen mit einander verbunden sind, so sagt dies: eine jede von diesen Größen ist einer jeden andern von diesen Größen gleich. Z. E. 6 + 6 = 14 — 2 = 5 + 7 = $\frac{24}{2}$ = 12.

§. 5.

Um verschiedene Größen zu bezeichnen, kann man sich der Buchstaben oder der Ziffern bedienen. Wählt man Buchstaben, so bezeichnet man, um eine Verwirrung zu vermeiden, die bekannten Größen durch die ersten, die unbekannten hingegen durch die letzten Buchstaben des Alphabets. Eine jede bekannte Größe kann man durch a bezeichnen. Durch b eine jede andere bekannte Größe, die von der Größe a auf irgend eine Art verschieden ist. Z. E. 3 Thlr. und 3 Gr. kann man ausdrücken: 3a + 3b; man hätte auch die Thlr. b, die Gr. a nennen können. 5 Jahr und 10 Tage weniger 4 Stunden = 5a + 10b — 4c. Soll 13 = a, 10 = b, 3 = c seyn; so ist a + b — c = 20.

§. 6.

Dinge von einer Art, bezeichnet man mit einerley Buchstaben; Dinge von verschiedener Art, mit verschiedenen Buchstaben.

Man

Man kann daher die in einer Aufgabe befindliche Größen durch beliebige Buchstaben ausdrücken; die einmal gewählten aber, darf man in derselben Rechnung nicht ändern.

§. 7.

Weil die Buchstaben nicht wie die Ziffern, einen Werth von der Stelle, wo sie stehen, erhalten; so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung man sie stellen will, wenn nur diejenigen Buchstaben, die durch ein Zeichen mit einander verbunden sind, nicht getrennet, und was vor dem Gleichheitszeichen stehet, nicht hinter dasselbe geworfen wird; und umgekehrt. Z. E. $+a - ab + c = +c+a-ba$.

§. 8.

Wenn die erste Größe kein Zeichen hat, so wird sie immer positiv angenommen.

§. 9.

Diejenigen Größen, deren Anzahl Einheiten bestimmte Einer sind, werden ohne Buchstaben; deren Einheiten nicht Einer oder nicht bestimmt sind, werden durch Buchstaben ausgedrückt. Z. E. wenn zu einer unbekanuten Anzahl Thaler 3 Thlr. addirt werden sollen; so ist die Summe X + 3 Thlr. 2 Schock 3 Stieg und 5 ist $2a+3b+5$.

§. 10.

Die mit + bezeichnete Größen sind positive Größen; das Zeichen + spricht man durch **Plus**, oder **und** aus; die mit — bezeichnete Größen sind negative Größen, das Zeichen — spricht man durch **Minus** oder **weniger** aus.

§. 11.

Schulden, hinunter steigen, gegen Norden sich bewegen, wird negativ, wenn baar Geld hinauf steigen, und gegen Süden sich bewegen, positiv angenommen ist. Nimmt man aber dieses negativ an; so wird jenes positiv.

§. 12.

Größen mit Plus, und Größen mit Minus, sind also entgegen gesetzte Größen. Es sind solche Größen, die einander vermindern. Wer mir eine Schuld von hundert Thalern aufbürdet, das ist, wer 100 Thlr. Schulden zu meinem Vermögen addirt, der vermindert mein Vermögen um 100 Thlr., weil ich die Schuld bezahlen muß. Wer mir 100 Thlr. giebt, der vermindert meine Schulden, weil ich mit solchen 100 Thlr. Schulden abtragen kann.

Wer mir eine Schuld von 100 Thalern abnimmt, das ist: wer eine Schuld von 100 Thlrn. von meinem Vermögen subtrahirt, der vergrößert mein Vermögen, weil ich die Schuld nicht zu bezahlen nöthig habe. Wer mir hingegen 100 Thlr. raubt, der vermehrt dadurch meine Schulden, weil solche in Ansehung meines nunmehro geringern Vermögens beträchtlicher werden.

Man siehet also hieraus, daß die Addition entgegengesetzter Größen, eine wahre Subtraction, und die Subtraction entgegen gesetzter Größen, eine wahre Addition sey. Hieraus fließen die Regeln, nach welchen man entgegen gesetzte Größen addiren und subtrahiren müsse.

II. Abschnitt.

Vom Addiren.

§. 13.

Weil, wie gesagt, entgegen gesetzte Größen addiren nichts anders ist, als das Gegentheil von der einen Größe subtrahiren; so ergiebt sich hieraus diese Regel:

Sind die Zeichen gleich, so addire man, wie man gewöhnlich addirt; sind sie aber ungleich, so subtrahire man die kleinere Größe von der größern, und setze in der Summe das Zeichen der Größern.

§. 14.

Weil addiren ist: Dinge von gleicher Art zusammen zählen, so folgt von selbst, daß man a zu a, und nicht zu b addiren müsse. Die Größen also, welche nur einmal in der Aufgabe sind, kann man zu keiner andern Größe addiren, man füge sie also mit ihrem Zeichen der Summe bey.

a und a ist nicht aa sondern 2a, denn aa sagt, daß a durch a multiplicirt sey.

bb und b kann nicht zusammen addirt werden, denn es sind Dinge von ungleicher Art. bb ist ein Produkt, b eine einfache Größe. Die Summe von beyden ist bb + b.

§. 15.

Eine Größe mit Plus, und eine eben so große Größe von derselben Art mit Minus, zusammen addirt, verzehren sich einander, und der Buchstabe wird in der Summe weggelassen. a sey 5 Thaler, habe ich 5

Thlr. und bin 5 Thlr. ſchuldig, ſo habe ich nichts; folglich $+a-a=0$.

Die Summe von 2 ab und 3 ab iſt 5 ab. Die Summe von 1a und 2a iſt 3a. Denn man zählt Dinge von gleicher Art zuſammen.

Dies ſind die Fälle, die zweifelhaft werden könnten. Ohne einen Anſtoß zu finden, wird man nun folgende Poſten zu addiren im Stande ſeyn.

$6a + 5b - 3c + 2ab - 3$	
$2a + b - 3c + 5ab - 10$	
Summe $8a + 6b - 6c + 7ab - 13$	

$2a + 5b$	$+10$ Thlr.
$3a - 10b$	-5 Thlr.
S. $+5a - 5b$	Summe $+5$ Thlr.

$a - b + c$	$ab + 6a - 4b$
$+ n - 3a - b - c$	$ab + a + 9b$
Summe $n - 2a - 2b$	S. $2ab + 7a + 5b$

$3a - 5b + 2c - 4$	
$5a + 10b - 7d - 16$	
Summe $8a + 5b - 7d + 2c - 20$	

§. 16.

Man gebraucht nur um der Bequemlichkeit willen beliebige Buchſtaben, wenn man Thlr., Gr., Pfennige, Pfund, Loth, Quentgen, Jahre, Tage, Stunden bezeichnen will. Statt der gewählten Buchſtaben aber kann man die Namen der Größen ſelbſt behalten, und dieſe Namen wie Buchſtaben behandeln. Auch unbenamte Zahlen kann man nach Belieben durch Buchſtaben ausdrücken, oder auch die Zahlen ſelbſt behalten.

§. 17.

Sind viele Posten zu addiren, so sammle man alle Größen von einer Art mit Plus, und alle Größen von derselben Art mit Minus zusammen, und addire die Summen.

	+ 15	— 4	+ 6	+ 5 — 7
	— 13	+ 10	+ 6	— 7 — 9
	+ 10	+ 2	— 9	+ 6 + 2
S.	+ 12	+ 8	+ 3	+ 4 — 14

	+ 1 Thlr.	— 16 Gr.	+ 5 Pf.
	+ 13 =	+ 10 =	— 7 =
	— 2 =	+ 20 =	+ 6 =
Summe	+ 12 Thlr.	+ 14 Gr.	+ 4 Pf.

+ 3 Pfund	+ 4 Loth	— 3 Quentg.	+ 2 Dertg.
— 5 =	— 6 =	+ 5 =	— 2 =
+ 10 =	+ 2 =	— 9 =	+ 6
+ 8 Pfund	0 Loth	— 7 Quentg.	+ 6 Dertg.

III. Abschnitt.

Vom Subtrahiren.

§. 18.

Das Minuszeichen fordert nach den Umständen ein entgegen gesetztes Verfahren. Zuweilen will es, daß die mit Minus bezeichnete Größe wirklich subtrahirt werden soll; in diesen Falle vermindert es die Größe, von welcher der Abzug geschiehet. Zuweilen sagt es: man müsse die, mit Minus bezeichnete Größe addiren, hier wird der Rest größer, als die Zahl ist, von welcher der Abzug geschehen, $5 - 4 = 1$. Dies ist der erste Fall. Der Ausdruck $5 - 4$ sagt: die 5

ist nicht ganz da, ihr fehlen 4, daher soll man die 4 abziehen, um den wahren Werth nämlich 1 zu erhalten.

Der 2te Fall ist subtr. —4+5, von Plus 5 soll Minus 4 abgezogen werden; oder, den 5 Thlr. soll eine Schuld von 4 Thlr. abgenommen werden, die 5 Thlr. wachsen daher zu 9 Thalern an.

§. 19.

Entgegen gesetzte Größen von einander subtrahiren, ist, das Gegentheil von der Größe, die abgezogen werden soll, addiren. Denn ein Vermögen wird größer, wenn man Schulden von demselben wegnimmt, und die Schulden vermehren sich, wenn man dem Debitor baar Geld abnimmt.

Dies giebt eine Regel der Subtraction die in allen Fällen gültig ist; sie ist diese:

Man verwandle ein jedes Zeichen der Größe, die abgezogen werden soll, in das entgegen gesetzte Zeichen, und addire nach dieser Veränderung, wie man entgegen gesetzte Größen addirt.

§. 20.

Es ist also zwischen dem Addiren und Subtrahiren kein anderer Unterschied, als daß man bey der Addition mit unveränderten, und bey der Subtraction mit veränderten Zeichen addirt.

§. 21.

Wenn man mit entgegen gesetzten Größen rechnet, so kann man auch eine größere Zahl von einer kleinern abziehen.

Von	+	9a	—	b	+	4c	+	5d — 10
Subtr.	+	14a	+	6b	—	7c	+	3d — 20

Nach

Nach veränverten Zeichen zeigt sich dies Exempel also:

	+ 9a	— b	+ 4c	+ 5d — 10
	— 14a	— 6b	+ 7c	— 3d + 20
Rest	— 5a	— 7b	+ 11c	+ 2d + 10

von	+ a	+ b			von	+ a	+ b	
Subt.	+ c	— d				+ c	— d	
Rest	+ a	+ b	— c	— d	R.	a+b	— c	+ d

von	+ a	— b	
	— a	+ b	
	+ 2a	— 2b	

von	+ 8	— 4	
	+ 2	+ 4	
Rest	+ 6	— 8	

von	+ 8
	+ 10
	— 2

	+ 10	+ 8
	+ 5	+ 4
Rest	+ 5	+ 4

Weil man die Veränderung der Zeichen mit geringer Mühe im Sinne verrichten kann; so habe ich diese Veränderung oben nur einmal ausgedrückt.

von	2	Thlr.	— 16	Gr.	+ 5	Pf.		
Subtr.	1	=	+ 10	=	— 3	=		
Rest	1	Thlr.	— 26	Gr.	+ 8	Pf.		

	Monath		Wochen		Tage		Stunden	
	+ 6	—	2	+	5	+	10	
	+ 4	—	3	—	6	+	5	
	+ 2	+	1	+	11	+	5	

	Centner		Pfund		Loth		Quentg.
	+ 3	+	60	—	50	+	3
	+ 4	+	50	+	31	—	2
Rest	— 1	+	10	—	81	+	5

Die Probe der Addition und der Subtraction iſt die gewöhnliche. Subtrahirt man nämlich einen Poſten nach dem andern von der Summe, ſo muß, wenn man recht addirt hat, am Ende nichts übrig bleiben.

Addirt man den gefundenen Reſt wieder zu der Größe, welche man abgezogen hat, ſo muß ſich in der Summe die Größe zeigen, von welcher der Abzug geſchehen iſt. Hierbey iſt aber zu merken, daß man zur Probe nicht die veränderten, ſondern die unveränderten Zeichen gebraucht.

IV. Abſchnitt.

Vom Multipliciren.

§. 22.

Wenn man zu einer zuſammen geſetzten Größe a + b — c die Größe n addiren, oder ſie von jener abziehen ſoll; ſo iſt die Addition oder die Subtraction verrichtet, wenn man n nur einmal hinzu addirt, oder nur einmal ſubtrahirt. Die Summe iſt a + b — c + n der Reſt iſt a + b — c — n. Denn wenn ich zu 6 Pfunden 2 Pfund addiren, oder 2 Pfund von denſelben ſubtrahiren ſoll; ſo lege ich 2 Pfund hinzu, oder nehme ſie von den 6 Pfunden ab; die Summe wird 8, der Reſt 4 ſeyn.

Soll man aber eine zuſammengeſetzte Größe a + b — c durch n multipliciren oder dividiren; ſo müſſen alle Theile der zuſammen geſetzten Größe, durch n multiplicirt oder dividirt werden. Das Produkt iſt an + bn — cn; der Quotient iſt $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n}$

Denn wenn ich 6 Pfundſtücke durch 2 multipliciren oder durch 2 dividiren ſoll; ſo kann ich ein jedes Pfund-

Pfundstück durch 2 multipliciren, oder mit 2 dividiren; um im ersten Falle das Produkt 12 Pfund, im andern Falle den Quotienten 3 Pfund zu erhalten.

§. 23.

Um aber obigen Ausdruck kürzer abzufassen, schließt man die zusammen gesetzte Größe, welche durch eine andere Größe multiplicirt oder dividirt werden soll, in eine Parenthese ein, und setzt den Multiplicator oder den Divisor mit dem Zeichen der Division zur Seite.

$$an + bn - cn = (a+b-c)\,n \text{ und}$$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = (a+b-c) : n = \frac{a+b-c}{n}$$

Setzt man statt der Buchstaben beliebige Zahlen, so giebt ein Ausdruck dasselbe Resultat, was der andere giebt. Denn es ist gleichgültig, ob man die Zahlen, welche durch a, b, c, ausgedrückt sind, eine jede besonders, durch n multiplicirt, und alsdenn die 3 Produkte nach Vorschrift der Zeichen zusammen sammlet, oder, ob man die durch a, b, c, ausgedrückten Zahlen zusammen sammlet, und die Summe durch n multiplicirt.

§. 24.

Soll eine zusammen gesetzte Größe durch eine zusammen gesetzte Größe multiplicirt, oder dividirt werden; so schließet man beyde in eine Parenthese ein, oder man schreibt die Division wie einen Bruch.

$$(a+b)\,(c-d \qquad (a+b) : (c-d) = \frac{a+b}{c-d}$$

Diese zur Multiplication und Division gestellten Größen bedeuten das noch nicht gefundene Produkt, und den noch nicht gefundenen Quotienten; man nimmt aber den Ausdruck der Multiplication als das Produkt,

dukt, und den Ausdruck der Diviſion als den Quotienten ſelbſt an, $\frac{6}{3} = 2$, man darf ſtatt des einen das andere ſetzen.

§. 25.

Will man aber wiſſen, aus welchen Theilen das Produkt oder der Quotient eigentlich beſtehet; ſo muß die Multiplication und Diviſion mit den Buchſtaben wirklich verrichtet werden. Wie man hiebey zu verfahren habe, wird in der Folge gezeigt.

§. 26.

Buchſtaben, die ohne Zeichen bey einander ſtehen, bedeuten ein Produkt, von welchen die einzelnen Buchſtaben die Factoren ſind. abcd heißt a iſt durch b, das Produkt durch c, und dieſes Produkt wieder durch d multiplicirt.

§. 27.

Der Coefficient eines Buchſtabens iſt die Größe, welche den Buchſtaben multiplicirt, 4c, ax, 4 iſt der Coefficient von c, a der Coefficient von x.

Die Coefficienten werden beſonders, und die Buchſtaben beſonders multiplicirt. Das Produkt von 3a durch 4b multiplicirt iſt, 12 ab.

§. 28.

Zu einer Gleichheit der Größen wird nicht allein erfordert, daß ſie gleich groß, und von einer Art ſind, ſondern auch, daß ſie einerley Zeichen haben. — 3 iſt nicht + 3 gleich. Und zu der Richtigkeit einer Proportion, die aus entgegen geſetzten Größen beſtehet, wird eben das von den Zeichen erfordert, was von den Größen ſelbſt erfordert wird.

§. 29.

§. 29.

Gleiche Zeichen geben im Produkte Plus, ungleiche Minus.

$$+ \text{ a mal } + \text{ b} = + \text{ ab}$$
$$- \text{ a mal } - \text{ b} = + \text{ ab}$$
$$+ \text{ a mal } - \text{ b} = - \text{ ab}$$
$$- \text{ a mal } + \text{ b} = - \text{ ab}$$

Man wird sich, um den Beweis einzusehen, aus dem 1sten Theile erinnern, daß Multipliciren das Suchen der vierten geometrischen Proportionalzahl sey. Wie sich 1 zu einem Factor verhält, so verhält sich der andere Factor zum Produkte.

3 mal 4 ist 12, $1:3=4:12$ $1:4=3:12$

Da man nun die Einheit immer positiv annimmt, so ist das erste Glied einer solchen Proportion, welches immer 1 ist, immer positiv. Was wird nun das Produkt 12 für ein Zeichen bekommen, wenn — 3 durch — 4 multiplicirt wird?

$+1:-3=-4:+12$. Wie sich + zum Gegentheile, zu — verhält; so verhält sich — ebenfalls zum Gegentheile, das ist zu +.

Hingegen wird das Produkt immer — zum Zeichen bekommen, wenn die Factoren ungleiche Zeichen haben. $+1:-3=+4:-12$. Wie + zum Gegentheile, so + zum Gegentheile, zu Minus.

§. 30.

Um eine zusammengesetzte Größe durch eine einfache zu multipliciren, multiplicirt man ein jedes Glied mit dem Coefficienten des Multiplicators, und hängt den Multiplicator einem jeden Gliede an.

a+b

a + b — d	2a — 3b + c — 4
+ a	— 3c
Prod. aa + ab — ad	Pr. — 6ac + 9bc — 3cc + 12c

2ab — a — g	3a — b + 6c
+ ab	— 2b
Prod. 2aabb — aab — gab	Pr. — 6ab + 2bb — 12bc

Wenn der Multiplicator kein Zeichen hat, ſo bleiben im Produkte die Zeichen des Multiplicandus.

	Pfund	Loth	Qu.
3 Thlr. — 30 Gr. + 5 Pf.	6 +	20 —	3
	4		10
Pr. 12 s — 120 s + 20 s	Pr. 60 +	200 —	30

§. 31.

Um zuſammengeſetzte Größen durch zuſammengeſetzte Größen zu multipliciren, multiplicire man, wie in Zahlen gewöhnlich iſt, jeden Theil des Multiplicandus durch jeden Theil des Multiplicators, und addire die gleichen Größen.

a + b	2a — b + c
a + b	+ 2a — c
+ ab + bb	— 2ac + cb — cc
aa + ab	4aa + 2ac — 2ab
Pr aa + 2ab + bb	Pr. + 4aa + cb — 2ab — cc

Weil es auf die Ordnung nicht ankömmt, ſo kann man die Produkte unter ihres gleichen ſchreiben.

+ a + b
+ a — b
— ab — bb
+ aa + ab
Prod. + aa — bb

+ 3 Thlr.

+ 3 Thl. — 10 Gr. + 3 Pf.	= 2 Thl. + 26 Gr. + 3 Pf.	
6 = + 2 =	=	8
+ 6 Thl. — 20 Gr. + 6 Pf.		16 Th. 208 Gr. 24 Pf.
18 = — 60 Gr. + 18 =		oder 21 Thl. 31 Gr.
Pr. 24 Thl. — 80 Gr. + 24 Pf.		
oder + 21 Thl. 31 Gr.		

§. 32.

Eine Zahl läßt sich auf mancherley Art ausdrücken. Z. E. 12 bestehet aus 2 Einern und 1 Zehner, aus 8 + 4, aus 7 + 8 — 3 u. s. w. Da nun 12 durch 12 multiplicirt 144 ist; so muß das Produkt 144 seyn, wenn man zween dieser Ausdrücke durch einander multiplicirt.

7 +	8 —	3
	8 +	4
28 +	32 —	12
56 +	64 —	24
Produkt 84 +	96 —	36 = 144

a sey 10
b sey 4 } so ist

2a +	3b —	5	=	+ 27
	3a +	2	=	32
+ 4a +	6b —	10		Pr. 864
— 15a +	9ab +	6aa		
— 11a +	9ab +	6b +	6aa — 10	= 864

V. Abschnitt.

Vom Dividiren.

§. 33.

Wenn die Division nicht wirklich verrichtet werden kann; so schreibt man nur den Divisor unter den Dividendus, wie man einen Bruch schreibt. Dieser Bruch ist der Quotient.

$$\frac{a - b}{c + d} = (a - b) : (c - d)$$

Wenn man aber wirklich dividiren kann; so geben gleiche Zeichen im Quotienten +, ungleiche —. Man dividirt aber die Coefficienten besonders, und die Buchstaben besonders.

$$+ 8aa : - 2a = - 4a$$
$$- 8aa : - 2a = + 4a$$

Der Beweis, welcher bey der Multiplication geführt ist, trift auch hier. Denn eine jede Division ist ebenfalls das Suchen der vierten geometrischen Proportionalzahl. Wie sich der Divisor zum Dividendus verhält; so verhält sich 1 zum Quotienten; oder, der Divisor steckt so oft im Dividendus, wie 1 in dem Quotienten steckt.

$$- 4 : - 8 = + 1 : + 2$$
$$+ 4 : - 8 = + 1 : - 2$$

§. 34.

Um eine zusammengesetzte Größe durch eine andere Größe zu dividiren; müssen alle Glieder des Dividendus durch den Divisor dividirt werden.

$$\frac{a - c + n}{b} = \frac{a}{b} - \frac{c}{b} + \frac{n}{b} = (a - c + n) : b$$

§. 35.

Wenn der Dividendus aus Produkten bestehet, und im Divisor gleiche Buchstaben sind; so ist die Division verrichtet, wenn man gleiche Buchstaben aus dem Divisor, und dem Dividendus gegen einander wegstreicht.

$$abc : ac = b \quad (aa + bb) : a = a + \frac{bb}{a}$$

$$(aa - bb + c) : b = \frac{aa}{b} - b + \frac{c}{b}$$

§. 36.

Soll eine zusammengesetzte Größe durch eine zusammengesetzte Größe dividirt werden; so verfährt man gerade so, wie man bey der Division in Zahlen verfährt; man dividirt das erste Glied des Divisors in ein Glied des Dividendus, multiplicirt den ganzen Divisor durch den gefundenen Quotienten, und ziehet die erhaltenen Produkte von den Gliedern des Dividendus ab, die gleiche Buchstaben mit dem Produkte haben. Dieß wiederhohlt man so oft, bis zuletzt entweder alles aufgehet, oder gehet nicht alles auf, so hänge man, wie bey Zahlen das Ueberbliebene dem Quotienten als einen Bruch an.

Auf die Ordnung der Glieder kömmt es nicht an, die Produkte ziehe man von einem Gliede des Dividendus ab, wo man es findet.

Drey Exempel sind genug dieses zu erläutern.

(aa+ac+bc—bb) : (a+b)

a+b) aa+ac+bc—bb | +a—b+c Quotient
aa+ab
— ab + ac + bc — bb
— ab — bb
ac + bc
ac + bc
0

+ab ſollte im obigen Exempel vom Dividendus abgezogen werden, weil ſich aber ab nicht fand, ſo mußte +ab mit dem — Zeichen als ein Reſt geſetzt werden, wie bey der Subtraction gezeigt iſt.

(aa — bb) : +a—b

a — b) aa — bb | a + b Quot.
aa — ab
ab — bb
0

(2aa—3ab—2bb+6b—3a—n):(2a+b—3)

+2a+b—3) 2aa—3ab—2bb+6b—3a—n | +a—2b— $\frac{n}{2a+b-3}$ Quot.
2aa+ab—3a
— 4ab—2bb+6b—n
— 4ab—2bb+6b
— n

§. 37.

Multiplicirt man den Quotienten wieder durch den Diviſor, ſo ſieht man in dem Produkte den Dividendus.

Divi-

Dividirt man ein Produkt wieder durch einen Factor, so erscheint im Quotienten der andere Factor. Die Probe der Multiplication und Division ist also, wie die Probe in Zahlen.

VI. Abschnitt.

Von den Brüchen.

§. 38.

Von den Brüchen ist deswegen wenig zu sagen, weil man nur die Regeln, welche bey Zahlen gebraucht werden, auf Buchstaben anwenden darf, dabey jedoch in Acht nimmt, wie entgegengesetzte Größen bearbeitet werden.

In der Addition und Subtraction addirt oder subtrahirt man nur die Zehler, wenn die Nenner gleich sind. Sind aber die Nenner ungleich; so hängt man bey der Addition die Größen durch +, bey der Subtraction durch — zusammen.

$$\frac{2a}{b} + \frac{4a}{b} = \frac{6a}{b} \left(\frac{a}{b} + \frac{4c}{b} \right) = \frac{a+4c}{b}$$

$$\frac{3a}{b} - \frac{2a}{b} = \frac{a}{b} \qquad \frac{5c}{n} + \frac{b}{n} - \frac{d}{n} = \frac{5c+b-d}{n}$$

§. 39.

Bestehen die Brüche aus Zahlen, so mache man die Nenner gleich, wenn sie ungleich sind; und addire oder subtrahire wie gewöhnlich.

Man addire.

+ $\frac{3}{4}$ Thlr.	+	$2\frac{1}{2}$ Gr.	—	$\frac{2}{3}$ Pf.
+ $\frac{1}{2}$ =	—	$3\frac{2}{3}$ =	+	$\frac{1}{12}$ =
Summe $1\frac{1}{4}$ Thlr.	—	$1\frac{1}{6}$ Gr.	—	$\frac{7}{12}$ Pf.

Man subtrahire.

$2\frac{3}{4}$ Centn.	—	$\frac{3}{8}$ Pfund	+	$\frac{2}{3}$ Loth	—	$\frac{1}{2}$ Qu.
1 =	+	$1\frac{3}{4}$ =	—	$\frac{1}{3}$ =	+	4 =
Rest $1\frac{3}{4}$ Centn.	—	$2\frac{1}{8}$ Pfund	+	1 Loth	—	$4\frac{1}{2}$ Qu.

§. 40.

Um einen unreinen Bruch rein zu machen, multiplicire man die ganze Größe durch den Nenner des Bruchs, und addire den Zehler zum Produkte.

$$a\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

§. 41.

Sollen Brüche durch einander multiplicirt werden, so multiplicirt man alle Zehler durch einander, und alle Nenner durch einander, das Produkt aus den Zehlern ist der Zehler des neuen Bruchs, das Produkt aus den Nennern, der neue Nenner. Eben so verfährt man auch mit Buchstaben.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{n} = \frac{aca}{bdn}$$

§. 42.

Wie zusammengesetzte Größen, unter welchen Brüche sind, durch zusammengesetzte Größen dividirt werden, zeigen folgende Exempel.

+ a—

$$a - \frac{c}{b}\Big)\, aa - ac - \frac{ac}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{cc}{b} + \frac{aa}{b} \;\Big|\; +a-c+-$$

$$\begin{array}{r} -ac - \frac{ac}{bb} + \frac{cc}{b} + \frac{aa}{b} \\ \hline 0 \end{array}$$

§. 43.

Wenn man Bruch durch Bruch dividirt, so dividirt man Zehler in Zehler, und Nenner in Nenner.

$$\frac{abc}{dn} : \frac{ac}{n} = \frac{b}{d}, \qquad \frac{6a}{15b} : \frac{2}{3} = \frac{3a}{5b}$$

oder man kehrt den Divisor um, und multiplicirt alsdenn Zehler durch Zehler und Nenner durch Nenner.

$$\frac{3a}{b} : \frac{2a}{5c} = \frac{3a}{b} \cdot \frac{3c}{2a} = \frac{9ac}{2ab} = \frac{9c}{2b}$$

Zweytes Kapitel.

I. Abschnitt.

Von den Potenzen.

§. 44.

Eine Potenz oder Dignität ist ein Produkt, das aus lauter gleichen Factoren besteht. Einer dieser gleichen Factoren heißt die Wurzel, oder die erste

Potenz. Werden zwey, drey, vier gleiche Factoren durch einander multiplicirt, so heißt das Produkt die 2te, 3te und 4te Potenz. Z. E. die Wurzel oder die erste Potenz sey 3, so ist die zwote 9, die dritte 27, die vierte 81 von der Wurzel 3. a bedeute eine Größe, welche sie wolle, so ist a die Wurzel, aa die zwote Potenz, aaa die dritte, aaaa die vierte Potenz; die Wurzel dieser Potenzen ist a.

Wenn man die Länge eines länglichten Vierecks durch die Breite multiplicirt, so giebt das Produkt die Fläche. Da nun die Länge eines Quadrats der Breite gleich ist; so bekömmt man die Fläche desselben, oder die 2te Potenz, wenn eine Seite durch sich selbst multiplicirt wird. Multiplicirt man diese Fläche abermal durch eine Seite, so giebt das Produkt den Inhalt eines Würffels, dessen eine Seite, einer Seite des Quadrats gleich ist. Zwar, wenn man die Theile einer Linie durch sich selbst multiplicirt, so bekömmt man dadurch keine Fläche, und wenn man die Theile der Fläche, durch die Theile einer Linie multiplicirt, so erhält man dadurch keinen Körper. Aber man erhält im ersten Falle eine Zahl, welche so viel Einheiten in sich fasset, als das gesuchte Quadrat kleine Quadrate in sich fasset; im andern Falle erhält man eine Zahl, welche so viel Einheiten in sich fasset, als der große Würffel kleine Würffel enthält.

§. 45.

Wenn eine Zahl zu einer gegebenen Potenz erhoben werden soll; so schreibt man rechter Hand über die Zahl, oder welches einerley ist, über die Wurzel, eine kleine Ziffer, welche anzeigt, zu welcher Potenz die Wurzel erhoben werden soll. Diese kleine Ziffer heißt

der

der Exponent der Potenz. a sey 4; so ist $a^3 = 4^3 = 64$; es ist aber a^3 gleich aaa, b^4 = bbbb.

§. 46.

Wenn die Wurzel aus einer Potenz gezogen werden soll; so soll einer dergleichen Factoren gefunden werden, durch deren Multiplication die Potenz erwachsen ist. Z. E. es wird die Potenz 64 gegeben, man soll aus solcher die Wurzel der dritten Potenz ziehen. Dis heißt: man soll 64 in die drey gleichen Factoren zerlegen, durch deren Multiplication 64 erwachsen ist; man soll die Zahl 4 finden. Sollte die Wurzel der zwoten Potenz aus 64 gezogen werden; so würde die gefundene Wurzel 8 seyn, weil 8 mal 8, 64 machen.

§. 47.

Das Zeichen, wenn die Wurzel ausgezogen werden soll, ist $\sqrt{}$. Eine kleine Ziffer über das Wurzelzeichen heißt der Wurzelexponent. Ist dieser Exponent 3, 4, u. s. w. so sagt er: man soll aus der Zahl, welche das Wurzelzeichen vor sich hat, die Wurzel der 3ten und 4ten Potenz ziehen. Hat das Wurzelzeichen keinen Exponenten, so soll immer die Wurzel der 2ten Potenz gefunden werden. Die Wurzel der 2ten Potenz heißt die Quadratwurzel; die Wurzel der 3ten Potenz die Cubicwurzel. $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt[3]{27} = 3$.

§. 48.

Wenn man eine ganze Zahl zu einer gegebenen Potenz erhebt; so ist die Potenz größer als die Wurzel, und eine höhere Potenz größer als eine niedrigere. Erhebt man einen Bruch zu einer Potenz, so ist die Potenz kleiner als die Wurzel; und eine höhere Potenz

kleiner als eine niedrigere. $\frac{1}{2}$ sey die Wurzel, so ist die zwote Potenz $\frac{1}{4}$, die dritte $\frac{1}{8}$, die vierte $\frac{1}{16}$ u. s. w.

§. 49.

Wenn man ein Produkt zu einer gegebenen Potenz erhebt; so ist die gefundene Potenz so viel, als wenn man einen jeden Factoren zu der gegebenen Potenz erhebt, und diese Potenzen durcheinander multiplicirt. $6^2 = 36, 2^2 . 3^2 = 36$.

II. Abschnitt.

Vom Rechnen mit Potenzen.

§. 50.

Die Zahl, oder der Buchstabe, welcher ohne Zeichen vor einer Größe steht, das ist, der die Größe multiplicirt, heißt der **Coefficient**: 3ab, ax; 3 und a sind hier Coefficienten.

§. 51.

Potenzen die gleiche Wurzeln und gleiche Exponenten haben, sind Dinge von gleicher Art. Da nun addiren ist: Dinge von gleicher Art zusammenzehlen; Subtrahiren, Dinge von gleicher Art von einander abziehen; so wird man hieraus richtig schließen, daß man, um Potenzen von gleichen Wurzeln und Exponenten zu addiren, oder zu subtrahiren, nur die Coefficienten zu einander addiren, oder von einander abziehen dürfe, die Wurzeln aber mit ihren Exponenten unverändert behalten müsse.

$$2a^2 + 3a^2 + a^2 = 6a^2. \quad 5c^3 - 2c^3 = 3c^3$$

§. 52.

§. 52.

Potenzen von ungleichen Wurzeln oder Exponenten, kann man durchs Zeichen der Addition oder Subtraction mit einander verbinden, aber eigentlich nicht addiren oder subtrahiren, denn es sind nicht Dinge von gleicher Art.

§. 53.

Zusammengesetzte Größen mit entgegengesetzten Zeichen, welche Potenzen enthalten, addirt oder subtrahirt man, wie man zusammen gesetzte Größen addirt oder subtrahirt, ohne darauf zu achten, daß es Potenzen sind.

$2a^3 + c^2 - g - 6$	$3a^4 - c^2 + 3n - 4$
$5a^3 - 4c^2 + 2g - 4$	$2a^4 - 3c^2 + 5n + 7$
S. $7a^3 - 3c^2 + g - 10$	Rest $a^4 + 2c^2 - 2n - 11$

§. 54.

Um Potenzen, die gleiche Wurzeln haben, durch einander zu multipliciren, addire man nur ihre Exponenten.

$a^3 . a^2 = a^5$, denn die beyden Factoren lassen sich durch aaa. aa ausdrücken; das Produkt aaaaa aber ist mit a^5 einerley.

Daß die Coefficienten besonders multiplicirt werden; daß gleiche Zeichen im Produkte +, ungleiche — geben, gilt auch hier.

$$\begin{array}{r} 3\,an^2 - dh^2 \\ 3cn^2 \\ \hline \text{Prod. } 9acn^4 - 3dhcn^{2\,3} \end{array}$$

§. 55.

In Fällen die zweifelhaft scheinen, wie man die Exponenten stellen müsse, kann man nur sowol den Multiplicator, als auch den Multiplicandus, blos durch Buchstaben ohne Exponenten ausdrücken, und wie gewöhnlich multipliciren. Das Produkt zeigt, wie man in diesen und ähnlichen Fällen die Exponenten stellen müsse. Das gegebene Exempel ohne Exponenten ausgedrückt, wäre:

$$\begin{array}{r} 3\,ann - dhh \\ 3\,cnn \\ \hline \text{Prod. } 9\,acnnnn - 3\,dhhcnn \end{array}$$

§. 56.

Um Potenzen von gleichen Wurzeln zu dividiren, subtrahire man den Exponenten des Divisors, vom Exponenten des Dividendus; der Quotient ist dieselbe Wurzel mit der Exponenten ihrem Reste.

$$a^3 : a^2 = a, \qquad c^5 : c^2 = c^3, \qquad b^9 : b^4 = b^5$$

Denn wenn man die Potenzen blos durch Buchstaben ausdrückt, und wie gewöhnlich dividirt; so bietet sich die Richtigkeit einem jeden von selbst an.

aaa : aa = a wie oben. Die Anwendung läßt sich leicht auf zusammengesetzte Größen machen.

§. 57.

Soll eine gegebene Potenz von neuem zu einer gegebenen Potenz erhoben werden; so multiplicire man die Expo-

Exponenten durch einander, das Produkt ist der gesuchte Exponent, die Wurzel bleibt unverändert. Z. E. man soll die dritte Potenz von a weiter zur zwoten Potenz erheben.

$$(a^3)^2 = a^6$$

Dieses Exempel heißt, wenn man es blos mit Buchstaben macht: man soll aaa zur zwoten Potenz erheben, oder welches einerley ist, durch sich selbst multipliciren; das Produkt oder die neue Potenz ist aaaaaa oder a^6

Soll die zwote Potenz von 4 zur fünften Potenz erhoben werden, so ist die neue Potenz 4^{10}.

§. 58.

Soll aus einer Potenz eine gegebene Wurzel gezogen werden; so dividire man den Exponenten der Potenz durch den gegebenen Wurzelexponenten. Der Quotient ist der Exponent der verlangten Wurzel. Z. E.

Aus der zwoten Potenz von a, soll die Wurzel der dritten Potenz gezogen werden, das ist $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$.

Die Cubicwurzel aus der 12ten Potenz von a ist a^4, die Quadratwurzel ist a^6. Man ziehe die Quadratwurzel aus dem Würffel von 4 ist $\sqrt{4^3} = 4^{\frac{3}{2}}$; das ist, man soll die Wurzel 4 zur dritten Potenz erheben, und aus solcher die Quadratwurzel ziehen.

§. 59.

Eine Wurzel, die aus zwey Theilen a + b besteht, auf einmal zu einer jeden gegebenen Potenz zu erheben.

Z. E.

Z. E. man ſollte a + b zur ſiebenten Potenz erheben; ſo müßte man um die zwote Potenz zu erhalten, a + b durch ſich ſelbſt multipliciren, das Produkt müßte man um die dritte Potenz zu erhalten, abermal durch die Wurzel multipliciren, und hiermit ſo lange fortfahren, bis die ſiebente Potenz erreicht wäre. Dieſe Arbeit iſt langwierig und beſchwerlich. Der Ritter Newton hat ein Mittel gefunden, durch zwo leichte Operationen eine zwotheilige Wurzel, zu einer beliebigen Potenz zu erheben, ohne die zwiſchen Potenzen machen zu dürfen. Die erſte Operation iſt dieſe:

Man ſchreibe den erſten Theil der Wurzel, von der geſuchten Potenz an, mit allen Potenzen, welche darinnen enthalten ſind, bis auf die Einheit bey einander. Hierunter ſchreibe man den zweyten Theil der Wurzel, von der Einheit an, bis zur gegebenen Potenz. Nun multiplicire man die über einander ſtehenden Glieder. Die hieraus erwachſenden Produkte ſind die Glieder der verlangten Potenz, welchen noch die Coefficienten fehlen. Z. E. a+b ſoll zur fünften Potenz erhoben werden.

a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
1	b	b^2	b^3	b^4	b^5

$$a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$$

Um a — b zu einer gegebenen Potenz zu erheben, darf man nur wie zuvor verfahren, alsdenn dem erſten Gliede + dem andern — geben, und ſo mit den Zeichen abwechſeln. Das 2te, 4te, 6te, 8te Glied wird Minus, die übrigen werden Plus zum Zeichen bekommen.

Man ſoll a — b zur ſechſten Potenz erheben.

a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
1	b	b^2	b^3	b^4	b^5	b^6

$+a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6$

Die zwote Operation ist: die annoch fehlenden Coefficienten zu den gefundenen Gliedern der Potenz zu finden.

Der Coefficient des ersten Gliedes ist immer 1, welchen man aus den Potenzen weglassen kann. Wir wollen zu obiger fünften Potenz die Coefficienten finden.

Man schreibe den Coefficienten des ersten Gliedes nämlich 1, diesem setze man einen Bruch zur Seite, dessen Zehler die Potenz, und der Nenner 1 ist, nämlich $\frac{5}{1}$; nun vermindere man so lange den Zehler um Eins, und vergrößere den Nenner um Eins, bis man den Zehler 1 erreicht hat. Es werden also die Brüche zur fünften Potenz diese seyn, $1 . \frac{5}{1} . \frac{4}{2} . \frac{3}{3} . \frac{2}{4} . \frac{1}{5}$. Diese Brüche geben nun die Coefficienten der 5ten Potenz folgendermaaßen: Der Coefficient des ersten Gliedes der Potenz ist die 1 vor den Brüchen. Der Coefficient des 2ten Gliedes ist das Produkt, welches erfolgt, wenn $1 . \frac{5}{1}$ durch einander multiplicirt werden, nämlich 5. Des 3ten Gliedes Coefficient ist das Produkt der 3 ersten Größen, $1 . \frac{5}{1} . \frac{4}{2}$; die vier ersten Größen $1 . \frac{5}{1} . \frac{4}{2} . \frac{3}{3}$ durch einander multiplicirt, geben den vierten Coefficienten. Der fünfte ist das Produkt der fünf ersten Größen $1 . \frac{5}{1} . \frac{4}{2} . \frac{3}{3} . \frac{2}{4}$; alle 6 Größen durcheinander multiplicirt, geben dem letzten Gliede seinen Coefficienten, welcher 1 ist. Obigen Gliedern der fünften Potenz müssen also noch diese Produkte vorgesetzt werden, 1, 5, 10, 10, 5, 1.

Die sechste Potenz erhält diese Größen: $1 . \frac{6}{1} . \frac{5}{2} . \frac{4}{3} . \frac{3}{4} . \frac{2}{5} . \frac{1}{6}$, die hieraus gefundenen Coefficienten der Potenz sind: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Folgende Brüche geben den Gliedern der dritten Potenz ihre Coefficienten,

$1 . \frac{3}{1}$

$1 . \frac{3}{1} . \frac{2}{2} . \frac{1}{3}$. Es ist die ganze Potenz $aaa + 3aab + 3abb + bbb$.

§. 60.

Die Coefficienten sind noch auf eine leichtere Art zu finden, und diese beruhet auf den möglichen Versetzungen der Buchstaben eines jeden Produkts der Potenz. Es lassen sich aber wie schon gesagt ist, eine Anzahl Buchstaben so oft versetzen, als das Produkt Einheiten hat, welches erfolgt, wenn die Ziffern nach ihrer natürlichen Ordnung von 1 bis auf die Anzahl der Buchstaben, durch einander multiplicirt werden. Z. E. die fünf Buchstaben abcde lassen sich deswegen 120mal versetzen, weil das Produkt der fünf Ziffern $1.2.3.4.5 = 120$ ist. Vier Buchstaben können 24mal versetzt werden, denn $1.2.3.4 = 24$.

Ist aber ein Buchstabe mehr als einmal im Produkte befindlich, so findet unter diesen gleichen Buchstaben keine Versetzung statt $aaa = 1$. Wäre aber das Produkt aaabb, so sehe man die 5 Buchstaben desselben so an, als wären sie alle ungleich, und mache das Produkt $1.2.3.4.5 = 120$. Weil aber a dreymal, b zweymal da ist; so dividire man das Produkt 120 durch $1.2.3.1.2 = 12$ durch 12, der Quotient ist 10 als die Anzahl aller möglichen Versetzungen, und als der Coefficient des Produkts aaabb.

Noch bequemer ist es, wenn die Factoren Bruchweis geschrieben, und die gleichen Factoren gegen einander weggestrichen werden. Die Factoren des Produkts aaabb sind $\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{2}$, $1.2.3$ gehet oben und unten gegen einander weg, es bleibt also $\frac{4}{1} \cdot \frac{5}{2} = 10$ als der Coefficient von a^3b^2.

Man will zu obiger fünften Potenz $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$ die Coefficienten auf diese Art finden.

Das

Das erste und letzte Produkt hat deswegen keine Coefficienten, weil das erste blos aus aaaaa, das letzte blos aus bbbbb bestehet.

$\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{5}{5} = 5$ also $5\,a^4b$

$\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2} = 10 - 10\,a^3b^2$

$\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3} = 10 - 10\,a^2b^3$

$\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{5}{5} = 5 - 5\,ab^4$

§. 61.

Das noch folgende in diesem Kapitel übersteigt eigentlich schon die Grenzen, über welche ich mich nicht begeben darf. Damit man jedoch wisse, was die hier noch folgenden Potenzen sagen wollen, wenn man sie in solchen Schriften antrift, die weiter als ich gehen, so will ich nur kurz davon reden.

Es ist bereits gesagt, daß eine gegebene Wurzel aus einer Potenz gezogen werde, wenn man den Exponenten der Potenz, durch den Wurzelexponenten dividirt. Z. E. die Quadratwurzel aus der 5ten Potenz von 7 wäre $7^{\frac{5}{2}}$ oder $\sqrt[2]{7^5}$. Da nun eine jede simple Zahl die erste Potenz ist; z. E. die Zahl $10 = 10^1$, $a = a^1$, so ist das Ausziehen der Quadratwurzel aus einer Zahl so viel, als den Exponenten 1 durch den Wurzelexponenten 2 zu dividiren, oder die Wurzel zur Potenz $\frac{1}{2}$ erheben, $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$. Die Cubicwurzel aus einer Zahl ziehen, ist so viel, als die Zahl zu $\frac{1}{3}$ Potenz erheben, $\sqrt[3]{64^1} = 64^{\frac{1}{3}}$

Wenn aus der 3ten Potenz der Größe a die Quadratwurzel gezogen werden soll; so kann dieses ausgedrückt werden $\sqrt[2]{a^3}$ oder $a^{\frac{3}{2}}$. Soll aus der 3ten Potenz

tenz von 6, die Wurzel der 4ten Potenz gezogen werden; so ist dieses entweder $\sqrt[4]{6^3}$ oder $6^{\frac{3}{4}}$ auszudrücken. Bruchpotenzen sind Wurzeln aus andern Potenzen.

§. 62.

Eine jede Potenz, deren Exponent o ist, bedeutet 1, so wie ein jeder Bruch, dessen Nenner dem Zehler gleich ist, 1 bedeutet. $16^0 = 1$; $16^1 = 16$; 16^* ist die Stammgröße, woraus 16 erwachsen ist, das ist 1. Oder man soll die 2te Potenz von 3 durch die 2te Potenz von 3 dividiren, der Quotient wird 1. Dies kann auch dadurch geschehen, daß des Divisors Exponent vom Exponenten des Dividendus subtrahirt wird, welcher dadurch o zum Exponenten erhält.

§. 63.

Eine Potenz mit einem negativen Exponenten sagt, man solle die Wurzel zu der Potenz erheben, welche der Exponent anzeigt, und diese Potenz zum Nenner eines Bruchs machen, dessen Zehler 1 ist. Z. E.

$a^{-c} = \frac{1}{a^c}$, $4^{-3} = \frac{1}{64}$, $3^{-2} = \frac{1}{9}$, $5^{-2} = \frac{1}{25}$

Denn eine jede Größe ist so viel, als wenn 1 durch sie multiplicirt wäre. $3 = 1 . 3$

§. 64.

Eine Potenz mit einem positiven Exponenten bedeutet, daß 1 durch die Potenz multiplicirt sey. $4^2 = 1 . 16$; man sind positive und negative Größen entgegengesetzte Größen, und die Division ist der Multiplication entgegengesetzt, daher sagt also ein negativer Exponent, man soll 1 durch die Potenz dividiren. Ein positiver Exponent zeigt an, wieviel Stuffen man über 1 hinauf steigen; ein negativer Exponent wieviel

Stuffen

Stuffen man unter 1 hinunter steigen soll. Oder $\frac{3^3}{3^5}$ läßt sich ausdrücken $3^{3-5} = 3^{-2}$, es ist also 3^{-2} so viel, als $\frac{3^2}{3^5} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$, $2^{4-2} = \frac{2.2.2.2}{2,2} = 2^2 = 4$.

Drittes Kapitel.

Von Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzel.

I. Abschnitt.

Von der Quadratwurzel.

§. 65.

Was heißt überhaupt eigentlich das Ausziehen der Wurzel? Folgende vier Aufgaben, deren Auflösung das Ausziehen der Wurzel nothwendig machen, werden die Antwort enthalten.

1) Es werden zwo Zahlen gegeben, deren eine 4 aus zwey, die andere 8 aus drey gleichen Factoren besteht, man soll die Factoren finden, aus welchen die beyden Größen bestehen, d. i. man soll aus 4 die Quadratwurzel, aus 8 die Cubicwurzel ziehen. In beyden Fällen ist die Wurzel 2. Solche Zahlen, die aus zwey gleichen Factoren bestehen, heißen Quadrat- die aus drey gleichen Factoren bestehen, Cubiczahlen. Aus diesen läßt sich immer die Wurzel genau ausziehen.

2) Es wird eine beliebige Zahl gegeben, welche sich nicht in zwey oder drey gleiche Factoren zerlegen läßt, man soll eine Zahl finden, welche einen der zwey oder drey gleichen Factoren so nahe kömmt, als man es verlangt. Genau erhält man in diesem Falle die

Wurzel nicht. Eine Zahl, aus welcher die Wurzel nicht genau gezogen werden kann, heißt eine Irrationalzahl. Z. E. 7, 5, 20, sind Irrationalzahlen. Rationalzahlen sind solche Zahlen, aus welchen die Wurzel genau erhalten werden kann.

Ein Exempel dieser Art wäre: Man hat ein Gefäß, welches 60 Maas, ein anders, welches 7 Maas fasset; man will ein Gefäß machen lassen, welches das kleinere Gefäß so oft in sich fassen soll, als das neue Gefäß in dem Größern enthalten ist. Oder man soll die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 7 und 60 finden. Diese Zahl ist gefunden, wenn 7 durch 60 multiplicirt, und aus dem Produkte die Quadratwurzel gezogen wird.

3) Es wird der Inhalt eines Quadrats oder Würffels gegeben, man soll die Größe einer Seite finden. Weil die Seite der Wurzel gleich ist, so muß man die Wurzel aus dem Inhalte ziehen; und man erhält in diesem Falle die Seite genau.

4) Es wird der Inhalt einer jeden beliebigen Fläche, oder eines jeden Körpers gegeben, man soll die Seite eines Quadrats oder Würffels finden, dessen Fläche oder dessen körperlicher Inhalt, der gegebenen Fläche, oder dem gegebenen Körper so nahe kömmt, als man verlangt. Im ersten Falle muß die Quadrat- im andern die Cubicwurzel ausgezogen werden. Man erhält aber hier die Wurzel nur alsdenn genau, wenn der Inhalt eine vollkommene Quadrat- oder Cubiczahl, wenn er rational ist.

§. 66.

Die Quadratwurzel auszuziehen.

Soll aus einer Zahl, die aus ein oder zwo Ziffern besteht, die Wurzel gezogen werden; so ist die Wur-

zel

zel die höchste Zahl, deren Quadrat sich von der gegebenen Zahl subtrahiren läßt. Z. E. die Wurzel aus 8 ist 2. Wollte man 3 zur Wurzel annehmen, so wäre das Quadrat von 3, 9. Dieses Quadrat aber läßt sich von 8 nicht abziehen. Die Wurzel aus 1, 2, 3, ist 1; aus 20 ist sie 4; aus 16 genau 4.

Bleibt nach verrichteter Subtraction kein Rest; so ist die Wurzel genau gefunden; bleibt ein Rest, so ist sie nicht genau. Es fehlt aber an der völligen Richtigkeit nie eine ganze Einheit der Wurzel. Denn wäre es eine ganze Einheit, so hätte man bey Bestimmung der Wurzel um Eins höher gehen können.

Dieser Rest ist weder eine ganze Zahl, noch ein Bruch. Wäre er eine ganze Zahl, so müßte er zum wenigsten Eins in der Wurzel seyn. Wäre er ein Bruch, so müßte er einen Nenner haben; beydes aber ist nicht. Es kann aber der Rest, wie die Folge zeigen wird, in einen Bruch verwandelt werden. Und eben hierdurch kann man der äußersten Richtigkeit, wenn die Zahlen irrational sind, so nahe kommen, als man will.

§. 67.

Aus einer Zahl von höchstens vier Ziffern die Wurzel zu ziehen.

Man theile die Zahl in Classen von der Rechten gegen die linke Hand ab, so daß man zwo Ziffern abschneidet; ist die Anzahl der Ziffern ungerade, so bekömmt die erste Classe nur eine Ziffer.

Um nun weiter alle Regeln, wie aus einer Zahl von mehr als zwo Ziffern die Quadratwurzel gezogen werden müsse, zu vermeiden; und um dieß Verfahren dem Gedächtnisse unvergeßlich zu machen; will ich gar keine Regel geben, sondern ein Quadrat, dessen Wur-

zel aus zwey Theilen besteht, wird pünktlich sagen, was man thun müsse, wenn die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl, aus einem reinen oder unreinen Bruche gezogen werden soll.

Man multiplicire a + b durch a + b. Das Quadrat ist aa + 2ab + bb. Dieses Quadrat sagt deutlich, wie man in jedem Falle verfahren müsse.

Zuvor aber muß ich erinnern, daß dieß Quadrat diejenige Zahl vorstellet, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll. Die Buchstaben der Wurzel a + b bedeuten die Ziffern der gesuchten Wurzel. Die erste Ziffer der Wurzel, oder die Ziffer des Buchstabens a findet man wie schon gesagt ist; die zwote Ziffer der Wurzel, oder die Ziffer des Buchstabens b findet man durch die ordentliche Division.

Es besteht aber das in Buchstaben ausgedrückte Quadrat aus dreyen Produkten, aus aa, aus 2ab, und aus bb. Wenn man nun mit den gefundenen Ziffern der Wurzel, dieselben Produkte macht, und solche von der gegebenen Zahl subtrahirt, so muß o erfolgen, wenn anders die gegebene Zahl eine vollkommene Quadratzahl ist. Ist dieses nicht, so bleibt ein Rest übrig.

§. 68.

Aus der Zahl 1369 soll die Quadratwurzel gezogen werden.

aa + 2ab + bb

		a b
	13 | 69	37
aa	9 |	
	4 | 69	
2a	— | (6)	
2ab	4 | 2	
bb	— | 49	
	4 | 69	

Nachdem

Nachdem zuvor die Zahl gehörig in Classen abgetheilt ist, suche man die Wurzel aus der ersten Classe 13, sie ist 3; nun wird 3 für a angenommen. Die Regel aa sagt: man solle a durch a oder 3 durch 3 multipliciren. Das Quadrat 9 ziehe man von der ersten Classe 13 ab, bleibt Rest 4; zu diesem Reste schreibe man die zwote Classe 69.

Das zweyte Produkt der Regel 2ab sagt: man solle a zweymal nehmen, ist 6. Diese 6 schreibe man deswegen unter die nächste Ziffer nach dem Striche, weil für bb die letzte Ziffer offen bleiben muß, und schließe sie in eine Parenthese, weil sie nur 2a nicht aber das ganze Produkt 2ab ist. Nun wird b, oder die Ziffer dieses Buchstabens durch die gewöhnliche Division gefunden; 6 steckt in 46, 7mal; über diese 7 schreibe man b, weil 7 für b genommen wird. Die Regel 2ab sagt: man solle 2a oder 6, durch b oder 7 multipliciren. Das Produkt 42 schreibe man dahin, wo es nach den Regeln der Multiplication geschrieben werden muß.

Das letzte Produkt der Regel bb sagt: man soll 7 durch 7 multipliciren, dieß Produkt 49 schreibe man in die letzte Classe Nun addire man bis an die Parenthese. Die Summe subtrahire man von der Zahl über der Parenthese von 469.

Weil hier o kömmt, so ist 1369 eine Quadratzahl, welche aus den zwey gleichen Factoren 37 besteht.

Multiplicirt man die gefundene Wurzel 37 durch sich selbst, so muß weil kein Rest überblieben ist, das Produkt der Zahl 1369 gleich seyn. Dieß ist der Beweis der Richtigkeit. Wäre ein Rest überblieben, so müßte dieser Rest noch zum Quadrate der Wurzel addirt werden, und es müßte ebenfalls die gegebene Zahl wieder erscheinen.

Wie groß ist die Wurzel aus 152?

Regel

$$aa + 2ab + bb$$

		a b
1	52	12
aa . 1		
	52	
2a —	(2)	
2ab —	4	
bb —	4	

8

Obgleich der Rest, welcher hier 8 ist, nie eine Einheit in der Wurzel beträgt; so kann man doch der Wahrheit durch einen angehängten Bruch weit näher kommen. Wie dieser gefunden werde, wird in der Folge gezeigt.

§. 69.

Die Quadratwurzel aus einer Zahl zu ziehen, die aus mehr als vier Ziffern besteht.

Es wird die Wurzel aus 357013 gefordert.

Regel

Regel.

$$aa + 2ab + bb$$

				a bb
	35	70	13	597
aa .	25			
	10	70		
2a .	(1	0)		
2ab .	9	0		
bb .	—	81		
	9	81		
		89	13	
2a .		(11	8)	
2ab .		82	6	
bb .			49	
		83	09	
		6	04	

Aus den beyden ersten Classen ziehe man die Wurzel gezeigtermaßen.

Nun sehe man den schon gefundenen Theil der Wurzel 59 als a an, nehme nach der Regel die 59 zweymal, und suche durch die Division ein neues b, nämlich 7; weiter verfahre man wie zuvor. Es ist zu merken, daß das Produkt aa nie mehr, als einmal gemacht werde, die Zahl mag aus so vielen Classen bestehen, als sie wolle. Wenn noch eine Classe folgte, so würde 597 a werden, und man müßte abermal ein neues b suchen, und die Rechnung, wie gezeigt ist, fortsetzen. Die Wurzel erhält immer so viele Ziffern, als die gegebene Zahl Classen hat.

§. 70.

Die Wurzel aus einem Bruche zu ziehen.

Die Wurzel eines Bruchs ist ein Bruch, dessen Zehler die Wurzel aus dem Zehler, und dessen Nenner die Wurzel aus dem Nenner ist.

Weil aber die Wurzel aus 100, 10; und überhaupt die Wurzel aus einer Zahl, die aus 1 und etlichen daran gehängten Nullen besteht, 1 mit halb so vielen Nullen ist; so ergiebt sich die Wurzel aus dem Nenner von selbst, wenn man den Bruch in einen Decimalbruch ausdrückt. Denn hier ist der Nenner immer eine 1 mit angehängten Nullen. Ist nun die Anzahl der Stellen des Decimalbruchs eben; so ist auch die Anzahl der Nullen des Nenners eben, und läßt sich daher halbiren. Z. E. die Wurzel aus dem Decimalbruche $\frac{3724}{10000}$ ist ein Bruch, dessen Zehler die Wurzel aus dem Zehler 3724, dessen Nenner die Wurzel aus 10000 ist. Da sich nun die Anzahl der Nullen des Nenners halbiren läßt, so ist die Wurzel aus diesem Nenner 100. Wäre aber die Anzahl der Decimalstellen uneben, so wären auch die Nullen des Nenners uneben und ließen sich nicht halbiren. Daher ergäbe sich die Wurzel aus dem Nenner in diesem Falle nicht von selbst, sondern müßte durch den ordentlichen Weg gefunden werden. Hieraus fließt folgende Regel.

Soll die Quadratwurzel aus einem Bruche gezogen werden; so verwandle man den Bruch in einen Decimalbruch; ist die Anzahl der Decimalstellen gerade, so ziehe man aus solchen die Wurzel; ist sie ungerade, so mache man sie durch angehängte Nullen gerade, und suche nun die Wurzel. Die Wurzel ist ein Decimalbruch.

Es soll die Wurzel aus $\frac{4}{5}$ gezogen werden. Diesen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, ist 0, 8, diesem Bruche müssen 1, oder 3, oder 5 Nullen angehangen werden, damit die Anzahl der Decimalstellen gerade sey.

		a b	
	80	00	0,89 oder $\frac{89}{100}$
aa –	64		
	16	00	
2a –	(1	6)	
2ab –	14	4	
bb –		81	
	15	21	
	79		

Die Wurzel aus einem Bruche ist immer gröſſer, als der Bruch ist, aus welchem die Wurzel gezogen worden.

§. 71.

Aus einem unreinen Bruche die Wurzel zu ziehen.

Man verwandle den Bruch in einen Decimalbruch, und hänge die ganze Zahl mit dem Bruche zusammen. Ist die Anzahl der Decimalstellen ungerade; so mache man sie durch eine angehängte Null gerade, und nun nehme man die Wurzel. Die Wurzel aus den Classen, welche die Ganzen in sich fassen, ist eine ganze Zahl; die Wurzel aus den Classen der Decimalstellen, ist ein Decimalbruch.

Was ist die Wurzel aus $1\frac{1}{2}$? $1\frac{1}{2} = 1,5 = 1,50$

1	50	1,2 = $1\frac{2}{10}$
	(2)	
	44	
	6	

Was ist $\sqrt{}$ $375\frac{1}{4} = 375,25$

	3	75,	25	$19,3 = 19\frac{3}{10}$	a b
aa –	1				
	2	75			
2a –		(2)			
2ab –	1	8			
bb –		81			
	2	61	25		
		14	25		
2a –		(3	8)		
2ab –		11	4		
bb –			9		
		2	76		

Nunmehro läßt sich zeigen, wie der überbliebene Rest einer Irrationalzahl durch einen Bruch ausgedrückt werde.

Man darf hinter einer jeden Zahl Nullen hängen, wenn nur die angehängten Nullen durch ein Comma unterschieden werden; (wie im Kapitel von den Decimalbrüchen gezeigt ist.)

Man hänge also dem Reste ein oder mehrere Paar Nullen an, und setze das Ausziehen der Wurzel, wie gezeigt ist, solchermaßen weiter fort, daß man den schon gefundenen Theil der Wurzel als a annimmt, und durch Dividiren ein neues b sucht. Durch jemehr Paar Nullen man die Wurzel berechnet, um desto schärfer wird sie gefunden. Aus der Zahl selbst ist die Wurzel eine ganze Zahl, aus dem Rest mit den angehängten Nullen ist sie ein Decimalbruch.

Regel

Regel.

$$aa + 2ab + bb$$

		a b b
r 28	99	53,8
aa 25		
3	99	
2a – (1	0)	
2ab – 3	0	
bb –	9	
Rest 90	00	
2a (10	6)	
2ab 84	8	
bb	64	
85	44	
4	56	

		a b b
r 3	1,73	$=1\frac{73}{100}$
aa 1		
Rest 2	00	
2a –	(2)	
2ab – 1	4)	
bb –	49	
1	89	
Rest 11	00	
2a – (3	4)	
2ab – 10	2	
bb –	9	
10	29	
Rest	71	

Wenn man dem ersten Reste keine Nullen anhängt, so beträgt die Unrichtigkeit nie eine Einheit der Wurzel; zwo angehängte Nullen verstatten nie eine Unrichtigkeit von dem 10ten Theile; durch vier angehängte Nullen die Wurzel gefunden, nie den hundertsten Theil einer Einheit. Die wahre Wurzel aus 3 ist größer als $1\frac{73}{100}$ und kleiner als $1\frac{74}{100}$. Man kömmt der Wahrheit durch jedes Paar mehr berechnete Nullen immer näher, ohne sie jedoch jemals völlig erreichen zu können.

Das gezeigte Anhängen der Nullen, ist nichts anders, als eine gleiche Multiplication und Division. Die Multiplication geschieht dadurch, daß dem Reste zwo Nullen angehangen werden. Die Division, daß man der Wurzel, die Wurzel aus 100, zum Nenner giebt.

§. 72.

§. 72.

Es soll die Wurzel aus 16016004 gefunden werden. Hier zeigt sich ein Fall der einen Ungeübten in Verlegenheit setzet.

				a b b b
	16 | 01	60	04	4002
2a –	(8)			
	01	60		
2a –	(8	0)		
	01	60	04	
2a –		(80	0)	
2ab –	1	60	0	
bb –			4	
			0	

Die Wurzel aus 16 war 4. Das Quadrat von 4 ist 16; dieses subtrahirt blieb, 0. 2a oder 2mal 4 ist 8. weil 8 in 0 nicht steckt, so erhielte man in der Wurzel 0. Wenn in der Wurzel 0 kömmt, so nimmt man die folgende Classe mit zur vorhergehenden. Hier erhielte man abermal in der Wurzel 0, daher mußte zu den beyden vorigen Classen noch die dritte genommen werden; nun konnte man erst zur Wurzel des Buchstabens b die Zahl 2 nehmen.

r	36	42	60,3
	36		
	0	42	
2a –	(1	2)	
		42	00
2a –		(12	0)
2ab –		36	0
bb –			9
		0	91

Wie

Wie groß ist die Wurzel aus $\frac{1}{4}$? aus $320\frac{1}{2}$? aus $\frac{1}{2}$? aus 2?

$\sqrt{\frac{1}{4}} = 0,25 \mid 0,5 = \frac{5}{10}$, $\sqrt{320\frac{1}{2}} = 3 \mid 20 \mid 50 \mid 17,9$

$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,\ 50 \mid 0,707$

	49		
	1 |	00	
	(1 |	4)	
	1 |	00 |	00
		(14 |	0)
		98 |	0
			49
		98	49
		1	51

	2 |	20	
		(2)	
	1 |	4	
		49	
	1 |	89	
		31 |	50
		(3 |	4)
		30 |	6
			81
		31	41
			9

$\sqrt{2} \mid 1,4$

	1	
	1 |	00
		(2)
		8
		16
		96

Rest 4

Um die Probe zu machen multiplicirt man die gefundene Wurzel mit sich selbst, addirt zum Produkte den Rest; so muß, wenn man richtig gearbeitet hat, die gegebene Zahl mit den angehängten Nullen erscheinen.

II. Abschnitt.

Von der Ausziehung der Cubicwurzel.

§. 73.

Die Cubicwurzel aus einer Zahl zu ziehen, welche höchstens aus dreyen Ziffern besteht.

Der Würffel einer Ziffer oder der Wurzel, ist das Produkt, wenn man die Wurzel durch sich selbst, und dieß Produkt abermal durch die Wurzel multiplicirt. Z. E. der Würffel der Wurzel 3 ist $3.3.3 = 27$, der Würffel von 9 ist $9.9.9 = 729$.

Die Wurzel aus einer Zahl von ein, zwo, oder drey Ziffern findet man, wenn man eine der Ziffern von 1 bis 9, wie eben gezeigt ist, zur dritten Potenz erhebt, oder welches einerley ist, zum Würffel macht. Und zwar muß diese Potenz die gröſseste seyn, welche sich noch von der gegebenen Zahl abziehen läßt; z. E. die Wurzel aus 337 ist 6, denn $6.6.6$ ist 216 Hätte man 7 zur Wurzel genommen, so wäre 343 der Würffel, dieser Würffel aber läßt sich nicht von 337 subtrahiren; folglich ist 7 zu groß.

Multiplicirt man das Quadrat $aa + 2ab + bb$ abermal mit der Wurzel $a + b$; so erhält man $aaa + 3aab + 2abb + bbb$. Dieser Würffel ist die Regel, nach welcher die Cubicwurzel, welche aus mehr, als einer Ziffer besteht, gefunden wird. Der Buchstabe a in dem Würffel ist die erste Ziffer der Wurzel; der Buchstabe b die zwote Ziffer.

Wenn man folgende 6 Punkte beobachtet, so sagen die Buchstaben der Regel so deutlich, wie man verfahren müsse, wenn einer Zahl die Cubicwurzel genommen wird,

wird, daß es kaum nöthig wäre, solches durch Worte noch einmal auszudrücken.

1) Die gegebene Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, muß von der rechten gegen die linke Hand in Classen abgetheilt werden, deren jede drey Ziffern bekömmt; die erste Classe linker Hand kann weniger Ziffern haben.

2) Der Würffel aaa wird nur einmal gemacht, und von der ersten Classe subtrahirt, die Wurzel mag aus so vielen Ziffern bestehen, als sie wolle.

3) Die drey übrigen Produkte, nämlich 3 aab, 3 abb, und bbb, werden von der zwoten Classe, und von dem, was aus der ersten Classe etwan übrig bleibt, subtrahirt. Um der Bequemlichkeit willen addirt man die drey Produkte, und zieht die Summe auf einmal ab.

4) Es werden aber diese Produkte von der rechten gegen die linke Hand geschrieben; und zwar so, daß man das Produkt 3 aab, unter die erste Ziffer der zwoten Classe, das Produkt 3 abb unter die zwote Ziffer, das Produkt bbb unter die dritte Ziffer zu schreiben anfängt.

5) Die Ziffer der Wurzel des Buchstabens b, wird durch die gewöhnliche Division gefunden.

6) Läßt sich die Summe der drey Produkte nicht subtrahiren; so ist die Ziffer der Wurzel zu groß angenommen. Bleibt der Rest zu groß, so ist sie zu klein angenommen, im ersten Falle vermindert man sie so lange um 1, bis sich die Summe subtrahiren läßt, im andern Falle vermehrt man sie um 1.

§. 74.

§. 74.

Aus einer Zahl, die höchstens aus sechs Ziffern besteht, die Cubicwurzel zu ziehen.

Die gegebene Zahl sey 12167.

Regel

aaa + 3 aab + 3 abb + bbb

			a b
	12	167	23
aaa –	8		
	4	167	
3 aa –	(1	2)	
3 aab –	3	6	
3 abb –		54	
bbb –		27	
		4167	
		0	

1) Man suche, wie gezeigt ist, die Wurzel der ersten Classe 12, welche 2 ist. Diese Wurzel ist a. Nach der Regel ziehe man den Würffel von 2 nämlich 8, oder aaa von der ersten Classe ab, bleibt Rest 4.

2) Zu diesem Reste füge man die zwote Classe. Die Regel 3 aab sagt, man solle a dreymal nehmen, das Produkt 6 durch a oder 2 multipliciren, ist 12. Dies Produkt fängt man immer unter der ersten Ziffer, hinter dem Striche, rückwärts zu schreiben an, und schließt es deswegen in eine Parenthese, weil es noch nicht die ganze Größe 3 aab ist.

3) Nun sucht man durch die Division die Ziffer des Buchstabens b. 12 steckt in 41 3mal, b ist also 3 in der Wurzel. Die Regel 3 aab sagt: man solle 3 aa durch b oder 3 multipliciren; dieß Produkt 36 schreibe man, wie es die Regel der Multiplication fordert.

4) Die

4) Die Regel 3 abb sagt: man solle a oder 2, dreymal nehmen, ist 6; dieß Produkt durch b, oder 3 multipliciren ist 18; dieß Produkt noch einmal durch b multipliciren, ist 54.

5) Das letzte Produkt bbb sagt: man solle den Würffel von b oder 3 machen, ist 27. Die Produkte bis an die Parenthese addirt, und die Summe, von der Zahl über der Parenthese subtrahirt, bleibt 0.

Es ist daher die gegebene Zahl, eine Cubiczahl, die sich in drey gleiche Factoren zerlegen läßt, und die gefundene Wurzel 23 ist, weil kein Rest übrig bleibt, völlig richtig.

Wird die Wurzel durch sich selbst multiplicirt, und das Produkt abermal durch die Wurzel multiplicirt, so erfolgt die gegebene Zahl wieder. Bleibt aber am Ende ein Rest, so muß dieser Rest zum Würffel der Wurzel addirt werden, um die gegebene Zahl wieder darzustellen. Dieß ist die Probe.

Weil sich dasjenige, was von der Quadratwurzel gesagt ist, sehr leicht auf die Cubicwurzel anwenden läßt, so darf ich mich hier kurz fassen.

§. 75.

Die Cubicwurzel aus einer Zahl zu ziehen, die aus mehr als 6 Ziffern beſtehet.

				a b b
	12	977	875	235
aaa —	8			
	4	977		
3 aa —	(1	2)		
3 aab —	3	6		
3 abb —		54		
bbb —		27		
	4	167		
		810	875	
3 aa —		(158	7)	
3 aab —		793	5	
3 abb —		17	25	
bbb —			125	
		810	875	

o

Nachdem man die Wurzel aus den beyden erſten Claſſen, wie gezeigt iſt, gezogen hat, ſo nimmt man den ſchon gefundenen Theil der Wurzel als a an, ſucht ein neues b, und ſetzt die Rechnung durch die noch übrigen Claſſen weiter fort; nur, daß man das Produkt aaa nicht weiter macht.

Bleibt am Ende ein Reſt, ſo iſt die gegebene Zahl eine Irrationalzahl, aus welcher ſich die Wurzel nicht genau ziehen läßt. Die Unrichtigkeit aber kann ſo klein werden, daß ſie als nichts zu achten iſt, wenn man dem Reſte 3, 6, oder 9 Nullen anhänget, und die Rechnung weiter fortſetzt. Die Wurzel aus der ganzen Zahl, iſt eine ganze Zahl; aus dem Reſte mit den

den angehängten Nullen, ist die Wurzel ein Decimalbruch.

Wenn in der Wurzel o kömmt, so hängt man immer die folgende Classe mit der vorhergehenden zusammen. Folgt keine Classe, so hängt man drey Nullen an, und sucht die Wurzel genauer, wo man einen Decimalbruch erhält.

Werden keine Nullen angehängt, so fehlt an der Richtigkeit keine ganze Einheit; drey angehängte Nullen aber lassen nie einen Fehler von $\frac{1}{10}$, 6 Nullen nie $\frac{1}{10^8}$ der Einheit zu.

			a b
	346	950	70,2
aaa —	343		
	3	950	
3aa —	(14	7)	
	3	950	000
3aa —	(1	470	0)
3aab —	2	940	0
3abb —		8	40
bbb —			8
	2	948	408
Rest	1	001	592

§. 76.

Die Cubicwurzel aus einem Bruche, ist ein Bruch, dessen Zehler die Wurzel aus dem gegebenen Zehler, und dessen Nenner die Wurzel aus dem gegebenen Nenner ist. Die Weitläuftigkeit aber ist, wie die Folge zeigt, unnöthig.

Aus einem Bruche die Cubicwurzel zu ziehen.

Man verwandle den Bruch in einen Decimalbruch, und ziehe aus solchem die Wurzel. Es ist aber nothwendig, daß die Anzahl der Decimalstellen, sich durch 3 ohne Rest dividiren lassen, das ist: der Bruch muß 3, 6, oder 9 u. s. w. Decimalstellen haben. Finden sich nicht so viele Ziffern im Decimalbruche, so müssen die fehlenden Stellen durch angehängte Nullen ersetzt werden. Diese angehängten Nullen verändern, wie man weis, keinen Decimalbruch.

Ich höre hier die Beantwortung der Fragen fordern: 1) Warum muß der gegebene Bruch durch einen Decimalbruch ausgedrückt werden? 2) Warum müssen die Decimalstellen, wenn die Wurzel richtig werden soll, in 3 aufgehen?

Die Cubicwurzel aus einer Zahl, die aus 1 und etlichen Nullen besteht, ist immer 1 mit dem dritten Theile der gegebenen Nullen. Z. E. die Wurzel aus 1000 ist 10, aus 1000000 ist sie 100. Man muß daher den gegebenen Bruch durch einen Decimalbruch ausdrücken, damit man einen Nenner erhalte, der aus 1 und Nullen besteht.

Es müssen aber die Decimalstellen deswegen in 3 aufgehen, damit man im Nenner eine Anzahl Nullen erhalte, die durch 3 theilbar sind. Beydes geschieht in der Absicht, damit sich die Wurzel aus dem Nenner von selbst ergebe. Der Nenner ist immer 1 mit so vielen Nullen, als der Zehler Decimalstellen hat.

Die

Die Cubicwurzel aus $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,500$

	0,500	0,79
aaa –	343	
	157	000
3 aa –	(14	7)
3 aab –	132	8
3abb –	17	01
bbb –		729
	150	039
Rest	6	961

Die Cubicwurzel aus $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} = 0,75 = 0,750$

0,750	0,908		
729			
	21	000	
	(24	3)	
	21	000	000
	(2	430	0)
	19	440	0
		172	80
			512
	19	613	312
Rest	1	386	688

§. 77.

Wenn aus einer ganzen Zahl die Wurzel gezogen wird, so ist die Wurzel kleiner als die gegebene Zahl, und die Cubicwurzel ist kleiner als die Quadratwurzel. Wird hingegen die Wurzel aus einem Bruche gezogen, so ist die Wurzel größer als der Bruch, aus welchem sie gezogen worden; und die Cubicwurzel ist größer als die Quadratwurzel. Denn wenn ein Bruch durch sich selbst multiplicirt wird; so ist das Produkt kleiner als einer der Factoren. Nun ist das Ausziehen der Wurzel das Gegentheil hiervon, daher muß auch das Gegentheil erfolgen, die Wurzel muß größer, als das Quadrat seyn.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ folglich ist die Wurzel aus $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

§. 78.

Aus einem unreinen Bruche die Cubicwurzel zu ziehen.

Man verwandle den Bruch in einen Decimalbruch, und hänge solchen mit der ganzen Zahl zusammen. Geht

die Anzahl der Decimalziffern in 3 auf, so kann die Ausziehung geschehen; ist dieses nicht, so ersetze man die fehlenden Stellen durch angehängte Nullen. Die Wurzel aus der ganzen Zahl, ist eine ganze Zahl, die Wurzel aus dem Reste und den Decimalziffern, ein Decimalbruch.

Es soll die Cubicwurzel gezogen werden aus $1\frac{1}{2} = 1,5 = 1,500$, aus $2234\frac{3}{4} = 2234,750$

$$aaa + 3aab + 3abb + bbb$$

				a b b
	1	500		1,14
aaa –	1			
		500		
3aa –		(3)		
3aab –		3		
3abb –		3		
bbb –		1		
	331			
	169	000		
3aa –	(36	3)		
3aab –	145	2		
3abb –	5	28		
bbb –		64		
	150	544		
	18	456		

$2 \mid 234$

	2	234	750	13,07
aaa	1			
	1	234		
3 aa		(3)		
3 aab		9		
3 abb		27		
bbb		27		
	1	197		
		37	750	
3 aa		(50	7)	
		37	750	000
3 aa		(5	070	0)
3 aab		35	490	0
3 abb			191	10
bbb				343
		35	681	443
			2 068	557

§. 79.

Wie die Quadrat und Cubicwurzel aus einer Größe zu ziehen, welche durch Buchstaben ausgedrückt ist.

Man verfährt gerade so, wie man, um die Wurzel zu erhalten, in Zahlen verfährt. Wie man dort immer zwo Ziffern bey Ausziehung der Quadratwurzel, und drey bey Ausziehung der Cubicwurzel abschneidet; so schneidet man auch hier im ersten Falle zwo Grösen mit ihren Zeichen, im andern Falle drey ab. Die Regel, nach welcher man verfährt, ist hier wie dort, nämlich das Quadrat von a+b ist die Regel bey Ausziehung der Quadratwurzel, der Würffel von a+b die Regel bey Ausziehung der Cubicwurzel. Gleiche Zeichen geben in der Wurzel Plus, ungleiche Minus.

$$
\begin{array}{r|l|l}
\sqrt{\ } 4aa & -4ab+bb & +2a-b \\
4aa & & \\
\hline
0 & -4ab+bb & \\
 & +(4a) & \\
 & -4ab+bb & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
\sqrt{\ } aa & +a+\frac{1}{4} & +a+\frac{1}{2} \\
aa & & \\
\hline
0 & +a+\frac{2}{4} & \\
 & +(2a) & \\
 & +a+\frac{1}{4} & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
\sqrt{\ } xx & -22x+121 & +x-11 \\
xx & & \\
\hline
0 & -22x+121 & \\
 & +(2x) & \\
 & -22x+121 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
\sqrt{\ } xx & +23x+132\frac{1}{4} & +x+11\frac{1}{2} \\
xx & & \\
\hline
0 & +23x+132\frac{1}{4} & \\
 & (2x) & \\
 & 23x+132\frac{1}{4} & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Die Zahl des Buchstabens b findet man durch eine ordentliche Division.

$$\begin{array}{l|l|l} r^3 + 8aaa & +12aab + 6abb + bbb & 2a+b \\ \quad 8aaa & & \\ \hline 0 & +12aab + 6abb + bbb & \\ & +(12aa) & \\ & \quad 12aab + 6abb + bbb & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Wenn eine Größe da iſt, aus welcher ſich die Wurzel nicht ziehen läßt, ſo ſetzt man dieſer Größe das Wurzelzeichen vor.

§. 80.

Die Wurzel der vierten Potenz aus einer Zahl, wird gefunden, wenn man aus der Quadratwurzel der Zahl, abermal die Quadratwurzel zieht.

$$\begin{aligned} xxxx &= 4096 \\ xx &= 64 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

§. 81.

Die Wurzel der 6ten Potenz iſt die Cubicwurzel aus der Cubicwurzel einer Potenz.

$$\begin{aligned} xxxxxx &= 64 \\ xxx &= 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

§. 82.

Die Wurzel aus einer negativen Zahl iſt unmöglich, denn die Quadratwurzel aus 16 iſt 4. Was wird die Wurzel aus Minus 16 ſeyn? Plus 4 kann ſie nicht ſeyn, denn dieß iſt die Wurzel aus Plus 16. Minus 4 kann ſie eben ſo wenig ſeyn, denn das Quadrat von Minus 4 iſt ebenfalls Plus 16; da es doch Minus 16 ſeyn müßte.

Jedes positive Quadrat hat also zwo Wurzeln die beyde gleich groß sind, aber entgegengesetzte Zeichen haben. Die Wurzel aus 4 ist + 2, sie ist aber auch — 2, denn in beyden Fällen ist das Quadrat + 4.

§. 83.

Da man nunmehro im Stande ist, a + b zu einer jeden Potenz zu erheben; so ist man dadurch vermögend, aus einer gegebenen Zahl die Wurzel einer jeden Potenz zu ziehen. Man darf nur den Vorschriften der Buchstaben folgen, wie man ihnen gezeigtermaaßen folgt, wenn die Quadratwurzel nach der Vorschrift der 2ten Potenz von a+b, und die Cubicwurzel nach der Vorschrift der 3ten Potenz ausgezogen wird. Z. E. es soll aus folgender Zahl die Wurzel der 7ten Potenz gezogen werden. Die 7te Potenz von a + b ist:

$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

	a b	
	340	4825449 | 23
a^7 —	128	
	212	4825449
$7a^6$ —	(44	8)
$7a^6b$ —	134	4
$21a^5b^2$ —	60	48
$35a^4b^3$ —	15	120
$35a^3b^4$ —	2	2680
$21a^2b^5$ —		20412
$7ab^6$ —		10206
b^7 —		2187
	212	4825447

Rest 2

Wenn man die Wurzel 23 wieder zur siebenden Potenz erhebt, und die überbliebene 2 addirt; so erscheint zum Beweise der Richtigkeit, die Zahl wieder, aus welcher die Wurzel gezogen worden. Soll die Wurzel

zel der fünften Potenz ausgezogen werden, so schneidet man von hinten zu fünf Ziffern, bey der siebenten Potenz, sieben Ziffern ab.

Viertes Kapitel.

Die Algebra.

Von den Gleichungen, und vom Auflösen der Gleichungen.

§. 84.

Die Algebra lehret unbekannte Größen, durch bekannte Größen, vermittelst Gleichungen zu finden.

§. 85.

Eine Gleichung ist: wenn eine Sache auf zwo verschiedene Arten ausgedrückt worden, und die verschiedenen Ausdrücke durchs Zeichen der Gleichheit mit einander verbunden sind.

Durchs Ordnen einer Gleichung werden die bekannten und unbekannten Größen durch die vier Rechnungsarten mit einander vermischt und verwickelt. Eine Gleichung auflösen heißt: diese Gleichung wieder zu entwickeln, die unbekannten Größen von den bekannten absondern, die Gleichung in dem kleinsten Ausdrucke darstellen, und dadurch den Werth der unbekannten Größe entdecken.

Der Werth der unbekannten Größe aber ist gefunden, wenn die unbekannte Größe sich allein auf einer Seite des Gleichheitszeichens befindet, und auf der andern Seite allein die bekannten Größen sind. Nun ist der Werth der unbekannten Größe den bekannten Größen gleich.

§. 86.

§. 86.

Eine einfache Gleichung ist, in welcher die unbekannte Größe x sich nur in der ersten Potenz zeigt.

$$ax + b = c$$

§. 87.

Eine höhere Gleichung ist, wenn die unbekannte Größe x, auf höhere Potenzen als die erste steigt.

$$xx + ab = c, \qquad xxx - cd = a$$

§. 88.

Eine reine Gleichung ist, wenn nur eine Potenz der unbekannten Größe darinnen angetroffen wird.

$$b + xx - c = a$$

§. 89.

Eine unreine Gleichung, wenn sich die unbekannte Größe, in mehr als einer Potenz zeigt, und die Wurzel sich nicht ausziehen läßt.

$$xx + ax = b, \qquad xxx - ax = ab$$

§. 90.

Eine bestimmte Gleichung ist, wenn sie nur eine unbekannte Größe enthält. $a + x = c$

§. 91.

Eine unbestimmte Gleichung, wenn mehr als eine unbekannte Größe sich in ihr befindet.

$$ax + y = bb$$

§. 92.

Eine bestimmte Aufgabe ist, wenn sich aus ihr so viele Gleichungen herleiten lassen, als unbekannte Grössen sind.

§. 93.

§. 93.

Eine unbestimmte Aufgabe ist, aus welcher sich nicht so viele Gleichungen herleiten lassen, als unbekannte Grösen sind.

§. 94.

Eine einfache Gleichung aufzulösen.

Alles kömmt darauf an, daß durch die Veränderungen, welche man vornehmen muß, um die unbekannte Grösse von den bekannten abzusondern, die Gleichheit nicht unterbrochen werde. Eine Waage, auf deren beyden Schaalen gleichschwere Gewichte liegen, erläutert die Auflösung. Legt man auf beyde Schaalen gleichschwere Gewichte hinzu, oder nimmt man von beyden Schaalen gleichschwere Gewichte hinweg; so bleibt ungeachtet dieser Veränderung die Waage im Gleichgewichte. Vervielfacht man die Gewichte in beyden Schaalen gleich, oder nimmt man von beyden einen gleichen Theil vom ganzen Gewichte; so wird hierdurch die Gleichheit ebenfalls nicht gestöret.

Eine gleiche Addition, Subtraction, Multiplication und Division, welche an beyden Hälften der Gleichung verrichtet wird, hebt die Gleichheit nicht auf. Eben so wenig wird die Gleichheit unterbrochen, wenn beyde Hälften zu einer Potenz erhoben, oder aus beyden Hälften gleiche Wurzeln gezogen werden.

Durch dieß Verfahren wird man vermögend, die unbekannten Grösen ohne Nachtheil der Gleichheit, von den bekannten Grösen abzusondern, und die Gleichung aufs kleinste darzustellen; nämlich: was dividirt ist, trennet man durch die Multiplication, was multiplicirt ist, durch die Division. Die Addition wird durch die Subtraction, und diese durch jene vernichtet. Potenzen werden dadurch in ihre Factoren zerlegt, woraus

aus sie erwachsen sind, daß man aus ihnen die Wurzel zieht, und ein Wurzelzeichen wird weggeschaft, wenn man die eine Hälfte der Gleichung zu der Potenz erhebt, welche der Wurzelexponent der andern Hälfte anzeigt.

§. 95.

Weil die Auflösung der Gleichungen bey einer jeden Aufgabe angewandt werden muß, so ist eine genauere Bestimmung, wie man eigentlich verfahren müsse, nothwendig.

Will man eine Größe, die Minus vor sich hat, aus einer Hälfte abschaffen, so addire man diese Größe zu beyden Hälften. Um eine Größe mit Plus abzuschaffen, subtrahire man sie. Nun fällt im ersten Falle die Größe mit —, im andern die Größe mit + weg.

Warum? wenn ich in einer Hälfte der Gleichung 6 Thlr. schuldig bin, und addire hiezu 6 Thaler, so verschwindet die Schuld; nun aber muß ich, um die Gleichheit zu erhalten, auch zur andern Hälfte 6 Thaler addiren.

$x - 6 = 10$	$x - b = a$
$x = 16,$	$x = a + b$

Wenn ich in einer Hälfte der Gleichung 6 Thlr. habe, die ich wegschaffen will, und subtrahire diese 6 Thlr., so behalte ich nichts; folglich erfordert die Gleichheit, daß ich auch 6 Thlr. von der andern Hälfte subtrahiren muß.

$x + 6 = 12$	$x + a = b$
$x = 6,$	$x = b - a$

Man kann immer, ohne Verletzung der Gleichheit, die Größen, welche vor dem Gleichheitszeichen stehen, mit entgegengesetzten Zeichen hinter dasselbe, und die

hinter

hinter dem Gleichheitszeichen stehen, mit entgegengesetzten Zeichen vor dasselbe werfen. Dieß aber ist nichts anders, als eine gleiche Addition oder Subtraction.

$$+a+2x-8=+b-x$$
$$3x=+b-a+8$$

Man kann auch ohne Veränderung des Werths, alle Zeichen der Gleichung ohne die Glieder zu versetzen in die entgegengesetzten Zeichen verwandlen.

$$(-xx+a=-5)\ =xx-a=5$$

Eine Größe wird durch ihren Coefficienten dadurch dividirt, daß man diesen Coefficienten wegstreicht. Denn man nimmt dieser Größe dasjenige, wodurch sie multiplicirt war, oder, welches einerley ist, eine gleiche Multiplication und Division hebt sich auf. Dann aber müssen auch alle übrigen Glieder der Gleichung, um die Gleichheit zu erhalten, durch diesen Coefficienten dividirt werden. Will man also einen Coefficienten wegschaffen, so streiche man ihn weg, und dividire durch ihn alle übrige Glieder der Gleichung.

$$4x+8=a+b-12 \qquad ax=ba-b+4$$
$$x+2=\frac{a+b}{4}-3 \qquad x=\frac{ba-b+4}{a}$$

§. 96.

Wenn man den Nenner eines Bruchs wegstreicht, und behält nur den Zehler; so wird dadurch der Bruch durch den Nenner multiplicirt, weil man dem Zehler dasjenige nimmt, wodurch er dividirt war. Will man daher einen Bruch aus einer Gleichung wegschaffen; so streiche man den Nenner weg. Weil nun hiedurch der Bruch multiplicirt ist, so multiplicire man auch, um-

die

die Gleichheit zu erhalten, alle übrige Glieder der Gleichung durch diesen Nenner.

$\frac{x}{2} = 3 + 4 - 2$ $\quad$ $\frac{x}{2} + 5 = b + c - 2$

$x = 6 + 8 - 4$ $\quad$ $\frac{x}{a} + 5a = ab + ac - 2a$

Sind mehrere Brüche da, so multiplicire man alle Glieder, die nicht Brüche sind, durchs Produkt aller Nenner; die Zehler der Brüche aber multiplicire man durchs Produkt der übrigen Nenner, ihren eigenen ausgenommen.

$\frac{a}{b} + c - \frac{2}{3} = n$ $\quad$ $\frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{4} = 3x$

$3a + 3bc - 2b = 3bn$ $\quad$ $8 + 24 - 3 = 36x$

§. 97.

Alle Glieder von einer Art, welche sich in einer Gleichung zerstreut finden, sammle man durch addiren oder subtrahiren in eine Größe zusammen. Denn ein Fünfpfundstück wiegt so viel als 5 einzelne Pfunde.

$+7a - 3b + 5a + 3b - 6 = +xx + x - 12y - xx + 6 + 8a$

$+4a = +x - 12y$

§. 98.

Die Ordnung, nach welcher man am vortheilhaftesten eine Gleichung auflöset, wird diese seyn:

1) Man schaffe alle Glieder weg, die durch eine gleiche Addition oder Subtraction weggeschaft werden können.

2) Nun schaffe man die Nenner der Brüche ab.

3) Man bringe die Glieder welche x, y, z enthalten vor das Zeichen der Gleichheit, die ganz bekannten Glieder hinter dasselbe.

4) Di-

4) Dividire man mit den Coefficienten der unbekannten Größe beyde Hälften. Hierdurch werden die unbekannten Größen von den bekannten abgesondert, und die Gleichung ist aufgelöset.

$3a + \frac{b}{c} + cx - 2a = x - nx + b$, hiervon + 2 a subtr. bleibt

$a + \frac{b}{c} + cx = x - nx + b$, mit dem Nenner c multipl.

$ac + b + ccx = cx - cnx + bc$, die unbekannten Glieder auf eine Seite

$ccx - cx + cnx = bc - ac - b$, mit $cc - c + cn$ beyde Hälften dividirt.

$$x = \frac{bc - ac - b}{cc - c + cn}$$

Wieviel ist die unbekannte Größe x in den folgenden drey Gleichungen?

$3x + 4 = 7x - 12$, 3x subtr.
$+4 = 4x - 12$, 12 addirt
$16 = 4x$, 4 div.
$4 = x$

$\frac{3}{4}x - 6 = 18$, 6 addirt
$\frac{3}{4}x = 24$, 4 mult.
$3x = 96$, 3 div.
$x = 32$

$5xx + 3x + 2 = 5xx - 2x + 17$, 5xx subtr.
$3x + 2 = -2x + 17$, 2x addirt
$5x + 2 = 17$, 2 subtr.
$5x = 15$, 5 div.
$x = 3$

Was ist das für eine Zahl, welche, wenn sie durch 6 multiplicirt, vom Produkte 4 subtrahirt, den Rest durch 5 dividirt, zum Quotienten 3 addirt wird, 100 giebt? x sey die Zahl.

$$\frac{6x-4}{5}+3=100 \qquad \text{5 multipl.}$$

$$6x-4+15=500, \qquad \text{4 addirt}$$

$$6x+15=504 \qquad \text{15 subtr.}$$

$$6x=489 \qquad \text{6 div.}$$

$$x=81\tfrac{1}{2}$$

§. 99.

Eine reine höhere Gleichung aufzulösen.

Man sehe die Potenz einer Größe als die Größe selbst an, und verfahre eben so, wie man bey einer einfachen Gleichung verfährt, nur daß man zuletzt, wenn die Potenz der unbekannten Größe auf einer Seite allein steht, die Quadrat- oder Cubicwurzel ausziehe, nachdem sich die Potenz in xx oder xxx zeigt. Die Buchstaben der bekannten Hälfte werden in die ihnen zukommenden Zahlen ausgedrückt, und aus der Summe dieser Zahlen wird diejenige Wurzel gezogen, welche die unbekannte Hälfte anzeigt. Was ist in folgender Gleichung x? a sey 4, b sey 2,

$$ab+\frac{3xx}{b}a=8a+5ab-7b, \qquad \text{a addirt, ab subtr.}$$

$$\frac{3xx}{b}=9a+4ab-7b \qquad \text{b multiplicirt}$$

$$3xx=9ab+4abb-7bb \qquad \text{3 dividirt}$$

$$\sqrt{xx}=\sqrt{3ab\frac{+4abb-7bb}{3}}=\sqrt{36}$$

$$x=6$$

§. 100.

Eine bestimmte Aufgabe aufzulösen.

Wenn sich in einer Gleichung zwo oder mehrere unbekannte Grösen befinden; so kann man von keiner derselben den Werth entdecken. Denn die Auflösung zeigt den Werth von allen unbekannten Grösen zusammen genommen, wenn man nämlich alle Buchstaben, welche die unbekannten Grösen bezeichnen, allein auf eine Seite der Gleichung brächte.

Der Werth aber von einer Grösse insbesondere, läßt sich nicht finden, es sey denn, daß alle übrigen, diese eine ausgenommen, bekannt sind, oder willkührlich angenommen werden.

Ist nun eine Aufgabe von der Art, daß die gesuchten Grösen sich nicht durch einen Buchstaben ausdrücken lassen, sondern, daß man mehrere sie zu bezeichnen wählen muß; so müssen alle Buchstaben, welche die unbekannten Grösen bezeichnen; außer einen weggeschaft werden. Um dieses möglich zu machen, leitet man so viele Gleichungen aus der Aufgabe her, als unbekannte Grösen da sind. Geht dieses aber nicht an; so ist die Aufgabe eine unbestimmte Aufgabe, von dieser wird nachher geredet.

§. 101.

Zwo unbekannte Grösen in einer Aufgabe mögen durch x und y ausgedrückt seyn. Um sie auflösen zu können, mache man auch zwo Gleichungen; diese mögen seyn, $x + y = 24$, $y - x = 2$. Denjenigen Buchstaben, welchen man abschaffen will, bringe man in beyden Gleichungen allein auf eine Seite. Wir wollen y abschaffen.

$y = 24 - x$. $y = 2 + x$

Nun hat man den Werth von y in zween verschiedenen Ausdrücken, nämlich in $24 - x$ und in $2 + x$. Diese Ausdrücke sind sich gleich, weil sie beyde einen Werth, nämlich den Werth von y haben, man setze sie also gleich, und y ist abgeschaffet.

$$24 - x = 2 + x,$$
$$22 = 2x$$
$$11 = x$$

Subtrahirt man 11 von 24, so erhält man im Reste den Werth von y, nämlich 13.

§. 102.

Ein ander Exempel von einer bestimmten Aufgabe mag dieses seyn.

Wenn des einen Garten 50 Quadratruthen größer wäre, als er ist; so wäre er dreymal so groß, als des andern Garten: wenn aber des andern Garten 10mal so groß wäre, als er ist; so würde er 1800 Quadratruthen mehr, als des ersten Garten halten. Wie viel Quadratruthen ist jeder Garten groß? Antwort des einen Garten x Ruthen, des andern y Ruthen.

Die beyden Gleichungen, welche aus dieser Aufgabe hergeleitet werden können, sind: Erste Gleichung: Die Größe des einen Gartens und 50 Ruthen ist so groß, als des andern Garten dreymal. Zweyte Gleichung: Des andern Garten 10mal genommen, ist so groß, als des ersten Garten und 1800 Ruthen. Diese Gleichungen durch Zeichen ausgedrückt:

$x + 50$

$x + 50 = 3y$, $10y = x + 1800$

$\frac{x+50}{3} = y$ $\quad y = \frac{x+1800}{10}$ statt y den Werth von y gesetzt.

$\frac{x+50}{3} = \frac{x+1800}{10}$ die Nenner weg

$10x + 500 = 3x + 5400$, 3x und 500 subtr.

$7x = 4900$ 7 dividirt

$x = 700$ Ruthen.

Addirt man zu diesen 700 Ruthen, 1800 Ruthen, und dividirt die Summe durch 10; so zeigt der Quotient die Größe des andern Gartens, nämlich 250 Ruthen. Denn $10y = x + 1800$.

So schaffet man, wenn mehrere unbekannte Größen da sind, eine nach der andern ab.

Um die Probe zu machen, darf man nur nach der Vorschrift der Aufgabe, 50 Ruthen zu den gefundenen 700 Ruthen addiren, die Summe durch 3 dividiren. Der Quotient wird den gefundenen Werth von y zeigen, und dadurch die richtige Auflösung der Aufgabe beweisen.

§. 103.

Eine unbestimmte Aufgabe aufzulösen.

Wenn sich aus der Aufgabe nicht so viele Gleichungen, als unbekannte Größen sind, herleiten lassen; so ist die Aufgabe unbestimmt. In diesem Falle nimmt man so viele unbekannte Größen, als Gleichungen fehlen, als bekannt an, und giebt ihnen einen beliebigen Werth. Nun hat man so viele Gleichungen, als noch unbekannte Größen da sind.

Die Werthe der gefundenen Größen sind unter der Bedingung richtig, wenn nämlich die angenommenen Größen so groß wären, als sie angenommen sind.

3 Centner Zucker, 2 Centner Coffee, und 4 Centner Reiß, kosten zusammen 154 Thlr. Von derselben Waare, und nach demselben Preise kosten 2 Centner Zucker, 4 Centner Coffee, und 3 Centner Reiß 186 Thaler; wie viel hat der Centner von einem jeden gekostet?

Antwort
- 1 Centner Zucker x Thlr.
- 1 Centner Coffee y Thlr.
- 1 Centner Reiß z Thlr.

In dieser Aufgabe sind also drey unbekannte Grössen x, y, z. Es können aber nur zwo Gleichungen aus derselben hergeleitet werden.

Die erste Gleichung ist $3x + 2y + 4z = 154$ Thlr.
Die zwote $2x + 4y + 3z = 186$ Thlr.

Zwo Gleichungen aber machen den Werth von drey unbekannten Größen nicht bekannt. Wir wollen den Mangel ersetzen, und annehmen, ein Centner Reiß habe 10 Thlr. gekostet, und in der ersten Gleichung statt 4z 40, in der zwoten statt 3z, 30 setzen; nunmehro fällt z weg, und wir haben noch zwo unbekannte Größen, und auch zwo Gleichungen, woraus sich der Werth von x und y entwickeln läßt.

$3x+2y+40=154$, $2x+4y+30=186$,
40 und 30 subtr.
$3x+2y=114$ $2x+4y=156$
x auf eine Seite
$3x=114-2y$ $2x=156-4y$
mit den Coefficienten von x dividirt
$x=\frac{114-2y}{3}$ $x=\frac{156-4y}{2}$ statt x, den Werth von x
$\frac{114-2y}{3}=\frac{156-4y}{2}$ die Nenner weg
$228-4y=468-12y$, 12y add. 228 subt.
$+8y=240$ 8 dividirt
$y=30$ Thlr.

Setzt man in obige Gleichung $3x+2y+40=154$ statt 2y, den gefundenen Werth von y, 2mal, und löset die Gleichung auf, so ergiebt sich der Werth von x; als 18 Thlr.

Setzt man statt der Buchstaben x und y, in obige Gleichungen die gefundenen Zahlen 18 und 30, und macht die Summen; so werden die Summen 154 und 186 seyn, und so die Richtigkeit der Auflösung beweisen. Das siebente Kapitel handelt ausführlicher von Unbestimmten Aufgaben.

§. 104.

Eine unreine Quadratische Gleichung aufzulösen.

Alle unreine Quadratische Gleichungen lassen sich also ausdrücken: $xx+ax=b$, oder $xx+8x=180$. Der Buchstabe a drückt einen jeden Coefficienten von x aus. Der Endzweck der Auflösung ist, die durch x bezeichnete unbekannte Größe von den bekannten Grös-

sen abzusondern, damit der Werth dadurch bekannt werde. Hätte man die unbekannte Größe nur in einer Potenz, $axx = b$ oder $axxx = b$, so dürfte man nur durch a die ganze Gleichung dividiren, und alsdenn im ersten Falle aus beyden Hälften die Quadratwurzel, im andern Falle die Cubicwurzel ausziehen, so erhielte man blos x. Da sich aber die unbekannte Größe x in verschiedenen Potenzen zeigt, so geht dieß Verfahren nicht an.

Man sieht, daß $xx + ax$, ein unvollständiges Quadrat ist. Man sieht weiter, daß die Wurzel dieses Quadrats aus zwo Größen besteht, weil sich in demselben eine unbekannte Größe x, und eine bekannte a befindet. Aus $xx + ax$, läßt sich die Wurzel nicht ziehen, weil es ein unvollständiges Quadrat ist, und doch muß die Wurzel ausgezogen werden, wenn man x allein erhalten, und dadurch den Werth desselben bestimmen will.

Wir wollen untersuchen, was diesem Quadrate an der Vollständigkeit fehle, damit wir das fehlende hinzu addiren können. Um dieses zu finden, wollen wir ein Quadrat machen, in welchem sich die Größe ax ebenfalls befindet. $x + \frac{1}{2}a$ ist die Wurzel eines solchen Quadrats.

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{2}a \\ x + \frac{1}{2}a \\ \hline \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}aa \\ xx + \frac{1}{2}ax \\ \hline \text{Quadrat } xx + ax + \frac{1}{4}aa \end{array}$$

Aus diesem vollständigen Quadrate siehet man, daß obigen unvollständigen Quadrate $\frac{1}{4}aa$ fehle. Addirt man dieses hinzu, so läßt sich die Wurzel ausziehen, wodurch man x allein erhält; und folglich den Werth desselben bestimmen kann. Dieß giebt die Regel, nach

welcher

welcher quadratiſche unreine Gleichungen aufgelöſet werden:

Zu einer unreinen Gleichung addire man beyderſeits $\frac{1}{4}aa$; oder, welches einerley iſt: man multiplicire den Coefficienten der unbekannten Größe durch ſich ſelbſt, dividire das Produkt durch 4, und addire den Quotienten zu beyden Hälften, alsdenn läßt ſich aus beyden Hälften die Wurzel ziehen.

Nach dieſer Regel wollen wir, um die obige unreine Gleichung $xx + 8x = 180$ auflöſen zu können, $\frac{1}{4}aa$ addiren.

$$\begin{aligned} \sqrt{}\ xx + 8x + 16 &= \sqrt{}\ 196 \\ x + 4 &= 14 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Beſteht die bekannte Hälfte aus Buchſtaben, ſo drückt man dieſe in den Zahlen aus, welche die Buchſtaben bezeichnen, und zieht aus ſolchen die Wurzel.

Nachdem man obige Gleichung $\frac{1}{4}aa$ erhalten hat, ſo ſieht ſie ſo aus.

$$xx + ax + \tfrac{1}{4}aa = b + \tfrac{1}{4}aa$$

Man addirt aber immer $\frac{1}{4}aa$ auch in dem Falle zu einer unreinen Gleichung, wenn ax negativ iſt. Warum? weil $\frac{1}{4}aa$ im Quadrate immer poſitiv wird, a mag in der Wurzel poſitiv oder negativ ſeyn.

$$\begin{array}{r} +x - \frac{1}{2}a \\ +x - \frac{1}{2}a \\ \hline -\frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}aa \\ +xx - \frac{1}{2}ax \\ \hline xx - ax + \frac{1}{4}aa \end{array}$$

Das Quadrat von $x + \frac{1}{2}$, iſt $xx + x + \frac{1}{4}$. Um nun eine unreine Gleichung aufzulöſen, in welcher x

keinen Coefficienten hat; als $xx+x=90$ addire man beyderseits $\frac{1}{4}$ hinzu.

$$\begin{aligned} \sqrt{\ } \quad xx + x + \tfrac{1}{4} &= \sqrt{\ } \; 90\tfrac{1}{4} \\ x + \tfrac{1}{2} &= 9\tfrac{1}{2} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Man kauft so viele Pfunde Waare als man für 1 Pfund Groschen bedungen hat, wegen promter Bezahlung aber ziehet man auf jedes Pfund einen Groschen ab. Die Bezahlung ist 1190 Groschen, mit wieviel Groschen ist ein Pfund bezahlt? Antw. mit x Gr.

$$\begin{aligned} xx - x &= 1190 \\ \sqrt{\ } \; xx - x + \tfrac{1}{4} &= \sqrt{\ } \; 1190\tfrac{1}{4} \\ x + \tfrac{1}{2} &= 34\tfrac{1}{2} \\ x &= 34 \end{aligned}$$

§. 105.

Es fallen bey den höhern Gleichungen mehrere Fälle vor, die, wenn sie aufgelöset werden sollen, besondere Bearbeitungen fordern. Diese Fälle aber sind über die Gränzen dieses Buchs. Weil aber die Auflösung folgender Aufgabe leicht ist, und ein Paar Vortheile zeigt, welche sich oft anwenden lassen; so kann ich sie nicht übergehen.

35 sey das Produkt zwoer Zahlen, 74 sey die Summe ihrer Quadrate, man soll aus diesen Angaben die Zahlen selbst finden.

Die eine Zahl sey x, die andere y.

Die Aufgabe giebt diese zwo Gleichungen an die Hand.

$$xy = 35, \qquad xx + yy = 74.$$

Dieß ist nun zwar eine bestimmte Aufgabe, weil sich so viele Gleichungen aus derselben finden lassen, als sie unbekannte Größen x und y enthält. Nun sollte

ein

ein Buchstabe x oder y abgeschaft werden, weil eine Gleichung nur eine unbekannte Größe enthalten darf. Dieses aber geht, nach dem zuvor gezeigten Wege, nicht an.

Man bringe also, um diesen Zweck zu erreichen, in der ersten Gleichung, einen Buchstaben allein auf eine Seite, so hat man $y = \frac{35}{x}$. Nun setze man diesen Werth von y, statt y in die andere Gleichung. Ist aber $y = \frac{35}{x}$ so ist $yy = \frac{35}{x} \cdot \frac{35}{x} = \frac{1225}{xx}$. Es ist daher die zwote Gleichung, $xx + \frac{1225}{xx} = 74$ aus welcher y abgeschaffet ist. Multiplicirt man nun, um den Nenner xx wegzubringen, die ganze Gleichung durch den Nenner xx; so erhält man $xxxx + 1225 = 74xx$, dieses ist eine Gleichung der vierten Potenz. Um sie quadratisch zu machen, wähle man einen beliebigen Buchstaben, der xx bedeuten soll, dieser sey v. Nun setze man in der Gleichung der vierten Potenz, v statt xx und vv statt xxxx, so hat man

$$vv + 1225 = 74v$$
$$vv - 74v = -1225$$

zu dieser unreinen Gleichung $\frac{1}{4}aa$, oder welches dasselbe ist, $\frac{74 \cdot 74}{4}$ beyderseits addirt, giebt $vv - 74v + 1369 = 144$ hieraus beyderseits die Wurzel gezogen, giebt

$$v - 37 = 12$$
$$v = 49$$

Weil nun v gleich xx ist; so muß, um x zu erhalten, die Wurzel noch einmal aus 49 gezogen werden, x oder

die

die neue Zahl ist also 7. Um die andere Zahl zu finden, setze man 7 statt x in die erste Gleichung

$$xy = 35$$
$$7y = 35$$
$$y = \frac{35}{7} = 5$$

Eine Zahl ist also 7 die andere 5.

§. 106.

Aus einer jeden gegebenen Irrationalzahl die Wurzel einer jeden gegebenen Potenz; oder aus einer jeden gegebenen höhern Gleichung, den Werth der unbekannten Größe durch Näherung zu finden.

Wenn aus einer Irrationalzahl die Wurzel einer beliebigen Potenz gezogen werden soll; oder wenn eine höhere Gleichung so beschaffen ist, daß der Werth der unbekannten Größe aus derselben nicht gefunden werden kann; so kann man sich immer des Weges bedienen, das Verlangte durch Näherung zu bestimmen. Man erreicht hier zwar die Wahrheit nicht völlig, allein man kann ihr so nahe kommen als man will.

Man errathe eine Zahl, welche die Wurzel ohngefähr seyn werde, und erhebe die errathene Zahl zur gegebenen Potenz, zeigt sich nun, daß sie zu groß oder zu klein angenommen ist; so vermindere oder vermehre man sie so lange um 1, oder etliche Einheiten, bis man die wahre Wurzel, bis auf einen Bruch nachgefunden.

§. 107.

Es wird die Gleichung gegeben $xx = 20$, wie groß ist x, oder man soll aus 20 die Quadratwurzel ziehen.

Die errathene Zahl sey 5, 5.5 ist 25, es ist daher 5 zu groß; sie sey 4, 4.4 ist 16, es ist daher 4 zu klein.

klein. Die wahre Wurzel fällt also zwischen 4 und 5, sie ist 4 und ein Bruch, oder 5 weniger einen Bruch. Diesen Bruch wollen wir v nennen, und den Werth von v suchen. Es ist also die wahre Wurzel oder $x = 4 + v$. Diese wahre Wurzel zur zwoten Potenz erhoben, oder xx gemacht, giebt xx oder $20 = 16 + 8v + vv$. Nun lasse man vv aus einer doppelten Ursache weg, einmal, weil die höhern Potenzen aus einem Bruche wenig betragen, und v ist ein Bruch. Zweytens, weil man die Wurzel nur beynahe verlangt, so hat man

$$16 + 8v = 20$$
$$8v = 4$$
$$v = \tfrac{1}{2},\ x = 4\tfrac{1}{2}$$

Hierdurch ist nun die Wurzel aus 20 schon weit näher bestimmt, denn das Quadrat von 4 ist um 4 kleiner als 20, das Quadrat von $4\frac{1}{2}$ ist nur um $\frac{1}{4}$ größer als 20. Es kömmt aber in diesem Falle die Wurzel immer etwas zu groß heraus, denn man hat von der einen Seite vv weggeworfen; von der andern Seite hätte man daher ebenfalls etwas wegwerfen müssen, da dieses nun nicht geschehen können, so bleibt 20 um ein weniges zu groß.

Will man nun die Wurzel noch genauer haben; so nehme man die gefundene Wurzel $4\frac{1}{2}$ oder $\frac{9}{2}$, addire dazu einen Bruch v, erhebe $\frac{9}{2} + v$, wie zuvor, zur zwoten Potenz, und lasse abermal das Glied vv aus der Acht, so erhält man

$$\frac{81}{4} + \frac{18v}{2} = 20$$
$$162 + 72v = 160$$
$$2 + 72v = 0$$
$$72v = -2$$
$$v = -\tfrac{1}{36}$$

Weil

Weil hier der Werth von v mit einem Minuszeichen heraus kömmt, so subtrahire man $\frac{1}{38}$ von $4\frac{1}{2}$, es ist also die nunmehro gefundene Wurzel von $20 = 4\frac{17}{38}$. Das Quadrat von dieser Wurzel ist nur noch $\frac{1}{1298}$ größer als 20, welches für nichts zu achten ist.

§. 108.

Auf gleiche Art findet man die Wurzel der höhern Potenzen, durch die Näherung.

Auch der Werth der höhern Gleichungen läßt sich auf gleiche Art finden. Wie viel ist in der Gleichung $xxx + 2xx - x = 63$ der Werth von x? Wenn man die errathene Zahl 3 als x annimmt, und mit solcher die Potenzen der Gleichung macht; so bekömmt man 42, da es 63 seyn sollten; folglich ist 3 zu klein. Nimmt man 4 als x an, so bekömmt man 92, folglich ist 4 zu groß. Die wahre Wurzel oder x ist also 3 und ein Bruch, oder $3 + v$. Es ist daher, wenn man diejenigen Glieder, welche vv oder vvv enthalten, wegläßt,

$$\begin{aligned} xxx &= 27 + 27v \\ 2xx &= 18 + 12v \\ -x &= 3 - 2v \\ \hline 42 + 38v &= 63 \\ 38v &= 21 \\ v &= \tfrac{21}{38} \text{ daher ist } x = 3\tfrac{21}{38} \end{aligned}$$

Der Werth von x ist nun noch um ein weniges zu groß. Um denselben noch genauer zu erhalten; nehme man $3\frac{21}{38} + v$ als x an, mache die Potenzen der Gleichung, setze die Summe $= 63$, und finde durch die Auflösung den Werth von v. Dieser neue Werth von $3\frac{21}{38}$ subtrahirt, giebt den Werth von x noch viel schärfer. Dieß Verfahren kann man so oft wiederholen als man will, und den Weg, die unbekannte Größe durch Näherung zu finden, auf eine jede höhere Gleichung anwenden.

§. 109.

§. 109.

Wenn alle Glieder einer jeden Gleichung auf eine Seite derselben geworfen werden; so verlieren dadurch beyde Seiten ihren ganzen Werth Ihr Werth wird $= 0$, denn die leer gewordene Hälfte bekömmt 0; in der andern Hälfte erschöpfen sich die positiven und negativen Größen einander, sie vernichten sich gänzlich. Man nennet dieß Verfahren eine Gleichung auf Null bringen, z. E. $2x + 3 - 5 = 60$; die Auflösung zeigt, daß $x = 31$ sey. Setzt man daher 2mal 31 statt $2x$ in obige Gleichung, so hat man $62 + 3 - 5 = 60$. Wirft man nun mit veränderten Zeichen die erste Hälfte zur zwoten, oder die zwote zur ersten Hälfte; so bekömmt man $62 + 3 - 5 - 60 = 0$ oder $+ 65 - 65 = 0$.

Eine jede Gleichung besteht nämlich aus zwo Hälften, indem man nun die eine Hälfte zur andern wirft, nimmt man sie von einer Seite weg, und subtrahirt sie von der andern, folglich bleibt auf beyden Seiten nichts. Es kann also eine jede Gleichung auf o gebracht werden. Man kann aber auch immer wieder eine Größe in die leere Stelle erhalten, wenn man ein beliebiges Glied der andern Seite, welches mit — bezeichnet ist, in die leere Seite mit dem Zeichen + setzt.

Fünftes Kapitel.

Von der Algebraischen Auflösung einer Aufgabe.

§. 110.

Um eine Aufgabe algebraisch aufzulösen, hat man auf dreyerley zu sehen.

1) Auf die Benennung der Größen.

2) Auf

2) Auf das Ordnen einer Gleichung.
3) Auf die Auflösung der Gleichung.

Die Auflösung der Gleichungen ist bereits im vorhergehenden Kapitel abgehandelt.

§. 111.

Von der Benennung der Größen.

Es ist zwar gleichgültig, ob man eine Größe a oder b, x oder y nennet; wenn nur die bekannten Größen durch die ersten, die Unbekannten durch die letzten Buchstaben bezeichnet werden. Ob man aber verschiedene unbekannte Größen durch einen, oder durch verschiedene Buchstaben ausdrückt, das ist nicht gleichgültig. Denn weil ein jeder der verschiedenen Buchstaben, welche die unbekannten oder gesuchten Größen bezeichnen, eine besondere Gleichung fordert; so hat man Ursache genug, die unbekannten Größen durch so wenige Buchstaben auszudrücken, als möglich ist.

§. 112.

Derjenige Buchstabe aber, welcher mehrere unbekannte Größen bezeichnet, muß zugleich anzeigen, worinn die Größen selbst von einander unterschieden sind. Sucht man vier Größen, deren Summe 50 seyn soll, und diese Größen sollen sich gegen einander verhalten wie 1, 3, 5, 9, so ist x, 3x, 5x, 9x, die richtige Benennung dieser Größen. Nun soll weiter ihre Summe der Summe 50 gleich seyn; daher mache man die Summe, und setze sie 50 gleich, $18x = 50$. Die Auflösung ergiebt, daß $x = 2\frac{7}{9}$ sey.

§. 113.

Man kann sich immer der Kettenregel bedienen, wenn man verschiedene Größen, deren Verhältniß unter

ter einander bekannt ist, durch Einen Buchstaben bezeichnen will. Sucht man vier Zahlen, die sich gegen einander wie 2, $\frac{1}{2}$, 5, $\frac{3}{4}$ verhalten sollen; so kann man eine beliebige von den gesuchten Größen als die Einheit annehmen, und sie x nennen; 2 mag x seyn Nach dieser Einheit nun wird der Werth der übrigen Größen bestimmet. Hierzu bedient man sich der Kettenregel; man sagt nämlich: wieviel ist $\frac{1}{2}$, wenn 2 ist x.

Das Facit giebt $\frac{x}{4}$; weiter, wieviel ist 5, wenn 2 ist x, Facit $2\frac{1}{2}$ x u. s. w. x, $\frac{x}{4}$, $2\frac{1}{2}$x, $\frac{3}{8}$x sind die richtigen Benennungen der gegebenen Größen. Wäre nun die Bedingung gefordert, daß die Summe aller Größen 100 seyn sollte; so würde man die Summe von diesen Größen 100 gleich setzen müssen $3\frac{3}{8}x = 100$ Die Auflösung zeigt, daß x oder die Größe, welche durch 2 ausgedrückt ist, $24\frac{8}{33}$ sey. Nun läßt sich der Werth der übrigen Größen durch die Kettenregel bestimmen. Wie viel ist $\frac{1}{2}$, wenn 2 ist $24\frac{8}{33}$. Die Summe aller also gefundenen Größen muß 100 seyn.

Man kann auch die gegebenen Größen benennen, $2x + \frac{1}{2}x + 5x + \frac{3x}{4}$. Die Summe hiervon ist $8\frac{1}{4}x$, diese Summe soll gleich 100 seyn, folglich ist $8\frac{1}{4}x = 100$, und x ist $12\frac{4}{33}$. Weil aber keine von den Größen durch x benahmt ist, so muß der Werth von x nämlich $12\frac{4}{33}$ durch 2, durch $\frac{1}{2}$, durch 5, durch $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden. Diese Produkte haben die geforderten Verhältnisse unter einander, und ihre Summe ist 100.

Weil von der Benennung die Richtigkeit einer Rechnung mit abhängt; so mögen noch ein Paar Exempel folgen.

Drey Arbeiter verfertigen einen Graben, der für 10 Thlr. bedungen ist. Der erste hat 7 Tage gearbeitet, der zweyte 11, der dritte 10 Tage; wieviel bekömmt ein jeder? Der erste bekömmt x Thlr., der zweyte $1\frac{4}{7}$ x, der dritte $1\frac{3}{7}$ x. Die Summe 4x, ist deswegen der Summe 10 Thlr. gleich, weil das eine sowol als das andere, das ganze Arbeitslohn ist.

$$4x = 10 \text{ Thlr.}$$
$$x = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2} \text{ Thlr.}$$

Nachdem der Lohn des ersten gefunden, so findet man den Lohn der übrigen durch die Kettenregel.

1 Thlr.	—	—	11	
7 :	—	—	$\frac{10}{4}$	Fac. $3\frac{13}{14}$ Thlr.
1	—	—	10	
7	—	—	$\frac{10}{4}$	Fac. $3\frac{5}{14}$ Thlr.

Man kann auch ein Tagelohn eines jeden x nennen, da nun der erste 7 Tage gearbeitet hat, so bekömmt er 7x, der andere 11x, der dritte 10x; die Summe aller Tagelohne ist 28x. Dieß ist gleich 10 Thlr., $28x = 10$ Thlr. Die Auflösung zeigt, daß x oder ein Tagelohn $\frac{5}{14}$ Thlr. sey; da nun der eine 7, der andere 11, der dritte 10 Tage gearbeitet hat, so muß $\frac{5}{14}$ durch 7, durch 11 und durch 10 multiplicirt werden, die Summe der Produkte $2\frac{7}{14} + 3\frac{13}{14} + 3\frac{5}{14}$ ist 10 Thl.

Ein Garten, in Form eines länglichten Vierecks, hält 315 Quadratruthen. Die Länge verhält sich zur Breite, wie 7 zu 5. Wie lang und wie breit ist der Garten? Die Länge 7, sey x Ruthen, nun finde man die Breite durch die Kettenregel. Wie viel ist 5, wenn

7 x

7 x ist; das Facit giebt $\frac{5}{7}$x. Die Fläche aber wird gefunden, wenn die Länge durch die Breite multiplicirt wird. Die Fläche des Gartens ist also $\frac{5xx}{7}$. Diese gefundene Fläche ist der Fläche 315 Ruthen gleich, weil eine Sache nur verschieden ausgedrückt ist. Man setze sie also gleich

Fac.	$\frac{5xx}{7} = 315$	7 multipl.
	$5xx = 2205$	5 divid.
Die Länge 21 Ruthen	$\sqrt{xx} = \sqrt{441}$	
Die Breite 15 Ruthen	$x = 21$	

Man kann auch die Länge durch 7x, die Breite durch 5x ausdrücken. Das Produkt wäre 35xx, diese Fläche des Gartens soll der Fläche 315 Ruthen gleich seyn, also $35xx = 315$; 315 durch 35 dividirt, giebt für xx den Werth 9, hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt $x = 3$. Weil aber die Länge 7x, die Breite 5x angenommen ist; so giebt dreymal $7 =$ die gesuchte Länge 21 Ruthen, und dreymal $5 = 15$ Ruthen als die Breite. Das Produkt der gefundenen Länge und Breite, giebt 315 als die geforderte Fläche. Dieß letztere ist die Probe der Richtigkeit.

Ist aber das Verhältniß der unbekannten Größen unter einander nicht angegeben, so kann man zwar zwo, aber nicht mehrere Größen durch einen Buchstaben ausdrücken. Die Zahl 34 soll in zween ungleiche Theile getheilt werden; so wird x einen Theil, $34 - x$ den andern Theil bezeichnen. Soll 34 in drey ungleiche Theile getheilt werden, und man kennet das Verhält-

niß der Theile unter einander nicht; so ist x der eine, y der andere, und 34 — x — y der dritte Theil.

§. 114.

Vom Ordnen der Gleichungen.

Man drückt immer eine Sache, welche die Aufgabe mittelbar oder unmittelbar in sich fasset, zweymal verschiedentlich aus, diese verschiedenen Ausdrücke sind sich deswegen gleich, weil sie nur eine Sache darstellen; man verbinde sie durchs Zeichen der Gleichheit.

Um eine Größe der Aufgabe zweymal ausdrücken zu können, nehme man an, die gesuchte Größe sey schon gefunden, und nenne sie x oder y, verbinde hierauf dieß x also mit den bekannten Größen, wie die Aufgabe will, daß die unbekannte Größe mit den bekannten verbunden werde. Dieß mit den bekannten Größen verbundene x, stelle die Sache in dem einen Ausdrucke dar; dieselbe Sache findet man in der Aufgabe auf irgend eine Art, noch einmal ausgedrückt. Verbindet man nun die zwey Ausdrücke durchs Zeichen der Gleichheit mit einander, so ist die Gleichung fertig.

Die Auflösung entwickelt die unbekannte Größe wieder von denen mit ihr verbundenen bekannten Grössen, und macht den Werth von x bekannt. Hierdurch ist das Gesuchte gefunden.

Ein Exempel wird dieß deutlicher machen.

Ein Bauer erndtet funfzehnmal so viel, als er ausgesäet hatte, und 9 Himten darüber; nachdem er die Hälfte der ganzen Erndte weggegeben, um das geliehene Korn wieder zu bezahlen, behielte er noch 306 Himten übrig. Wie viel Himten hat der Bauer ausgesäet?

Wir

Wir wollen annehmen, er habe x Himten ausgesäet, was sind nun die 306 Himten? Sie sind die Hälfte der ganzen Erndte. Wir wollen diese Hälfte noch einmal durch x ausdrücken, weil der Mann seine Aussaat funfzehnmal geerndtet hat, und 9 Himten darüber, so wollen wir auch die Aussaat x funfzehnmal nehmen, und 9 Himten darüber $15x+9$

Dieß ist die ganze Erndte; weil er aber nur die Hälfte behielt, so wollen wir von $15x+9$ ebenfalls durch 2 dividiren, giebt

$$\frac{15x+9}{2}$$

Diese Hälfte ist derselben Hälfte 306 gleich, folglich

$$\frac{15x+9}{2} = 306 \qquad \text{2 multipl.}$$

$$15x+9 = 612 \qquad \text{9 subtr.}$$

$$15x = 603 \qquad \text{15 divid.}$$

$$x = 40\tfrac{1}{5} \text{ Himten}$$

§. 115.

Oft darf man nur den Aussprüchen der Aufgabe pünktlich folgen, um die Gleichung richtig zu erhalten.

Man soll eine Zahl finden, die, wenn sie durch 5 multiplicirt, vom Produkte 13 subtrahirt, der Rest durch 7 dividirt wird, zum Quotienten 20 giebt; was ist das für eine Zahl? Die Zahl ist x.

Verfährt man mit dieser unbekannten Größe x, so wie die Aufgabe sagt; so erhält man die 20 in dem zweyten Ausdrucke.

$$\frac{5x-13}{7} = 20$$

$$5x-13 = 140$$
$$5x = 153$$
$$x = 30\frac{3}{5}$$

§. 116.

In sehr vielen Fällen bedient man sich der Kettenregel um eine Gleichung zu erhalten.

Bey einer Commission bekömmt der Amtmann jeden Tag 3 Thlr., der Amtschreiber 2 Thlr., der Voigt in 4 Tagen 5 Thlr., ein Bedienter täglich $\frac{1}{3}$ Thlr. Die ganze Commission kostet 200 Thlr., wieviel Tage hat die Commission gedauert? Antwort x Tage.

Was sind diese 200 Thlr.? Sie sind die Summe von dem, was alle Glieder der Commission, die ganze Zeit ihrer Arbeit hindurch, erhalten haben. Um diese 200 Thlr. noch einmal durch x auszudrücken, rechne man durch die Kettenregel aus, wie viel ein jeder in x Tagen bekommen. Die Summe dieser erhaltenen Facitte, ist die 200 Thlr. durch x ausgedrückt. Man stelle also beyde Ausdrücke gleich.

Amtmann	$3x$	$\frac{79}{12}x = 200$
Amtschreiber	$2x$	$79x = 2400$
Voigt	$1\frac{1}{4}x$	$x = 30\frac{30}{79}$ Tage.
Bedienter	$\frac{1}{3}x$	
Summe	$\frac{79x}{12}$	

§. 117.

In einigen Aufgaben ist keine von den Größen, welche man gleichstellen will, eigentlich ausgedrückt, man muß sie erst finden.

Ein

Ein Mann der 300 Thlr. hat, verzehrt alle Tage von diesem Capitale $\frac{3}{4}$ Thlr.; ein anderer, der nichts hat, fängt zu derselben Zeit an, alle Tage $\frac{1}{3}$ Thlr. beyzulegen. Nach wie vielen Tagen haben beyde Personen gleichviel Geld? Antwort nach x Tagen.

Man rechne durch die Kettenregel aus, wie viel Thlr. der eine in x Tagen erspart, der andere hingegen von den 300 Thlrn. verzehrt. Wird das in x Tagen verzehrte Geld, nämlich $\frac{3}{4}$x von 300 subtrahirt; so soll nach der Aufgabe der Rest demjenigen gleich seyn, was der andere in x Tagen erspart hat. Man stelle dieß also gleich.

1 Thlr. — — x Tagen		3x
1 Tag — — $\frac{3}{4}$ Thlr.	Fac.	—
		4
1 Thlr. — — x Tagen		1x
1 Tage — — $\frac{1}{3}$ Thlr.	Fac.	—
		3

$$300 - \frac{3x}{4} = \frac{x}{3}$$

$$3600 - 9x = 4x$$

$$3600 = 13x$$

Tage $276\frac{12}{13} = x$

Dieß wären die Fälle welche am häufigsten vorfallen. Die Gegenstände der Algebra aber sind so mannigfaltig, und von so verschiedener Art, daß sich keine allgemeine Regel, die da zeigt, wie man in allen Fällen die Gleichung stellen müsse, angeben läßt. Eine hinlängliche Uebung giebt hierin eine Fertigkeit. Wenn man die unbekannten Größen gehörig bezeichnet hat, und die Aufgabe mit Aufmerksamkeit betrachtet; so wird man bald finden, welche Größe in derselben am bequemsten noch einmal ausgedrückt werden kann, und wie sie ausgedrückt werden müsse.

Sechstes Kapitel.

Algebraische Aufgaben.

I. Abschnitt.

Vermischte Aufgaben.

§. 119.

Wenn man nur die vier Species kennet, so läßt sich alles, was berechnet werden kann, durch die Algebra berechnen. Sie hat daher einen großen Einfluß in alle Theile der Mathematik und der Naturlehre. Ihr Umfang ist so groß, so allgemein, daß sich ihre Gränzen nicht bestimmen lassen. Ohne sie würde sich auch die Rechenkunst in einer viel dürftigern Gestalt zeigen; denn was man durch die Algebra gefunden hat, das hat man in die gewöhnliche Arithmetik übergetragen. Schwerlich würde man entdeckt haben, wie die Quadrat- und Cubicwurzel aus der zwoten und dritten Potenz gezogen werden müsse, wenn nicht das Quadrat und der Würfel von $a+b$, das ganze Verfahren so deutlich vorgeschrieben hätte. Und weil man hier überhaupt mit den willkührlichen Zeichen der gegebenen und gesuchten Größen, eben so verfährt, wie man, um ein gesuchtes Resultat zu erhalten, mit den Größen selbst verfahren würde; so schärft sie den Verstand; durch ihre Vorschrift geleitet, behandelt man die Aufgabe aufs natürlichste, und so, wie es der Sache aufs genaueste angemessen ist.

Um dieses zu zeigen, mag ein Mann 6 Maaß Wein, wovon ein Maaß 6 Gr. werth ist, mit einem Weine, von welchem das Maaß 4 Gr. gilt, also vermischen wollen, daß 1 Maaß von dem Vermischten 5 Gr. werth sey. Wie viel Maaß muß er vom Schlechtesten zum Besten gießen?

Wie

Wie findet dieser Mann, der die Regel der Vermischung nicht kennet, dasjenige, was er sucht? Seine Algebra muß ihm helfen. Er nimmt an, die gesuchte Anzahl Maaß vom Schlechtesten sey x; hierauf bezeichnet er die bekannten Zahlen in der Aufgabe mit den ersten Buchstaben des Alphabets.

Die gesuchte Anzahl Maaße vom Schlechtesten ist = x

Der Preis eines Maaßes hiervon, nämlich 4 Gr. = c.

Die Anzahl der Maaße vom Besten, nämlich 6 Maaß, = a.

Der Preis eines Maaßes vom Besten, 10 Gr. = b.

Vom Vermischten bekömmt der Mann 6 + x = a + x.

Der Preis eines Maaßes vom Vermischten, 5 Gr. = d.

Nun bearbeitet er die gewählten Buchstaben statt der Zahlen. Die erste Regel der Algebra fordert, daß er eine Sache der Aufgabe doppelt ausdrücken müsse. Er entdeckt aber ohne Mühe, daß der Preis des besten Weins, mit dem Preise des Schlechtesten zusammen genommen, dem Preise des Vermischten gleich sey. Denn der vermischte Wein besteht aus dem besten und schlechtesten. Um den Preis des Besten, des Schlechtesten, und des Vermischten zu erhalten, rechnet er durch die Kettenregel aus: wie viel a Maaß kosten, da 1 Maaß b Gr. kosten; weiter, wie viel Gr. x Maaß kosten, da 1 Maaß c Gr. kosten; und wie viel von dem vermischten Weine a + x Maaß kosten, da ein Maaß d kostet. Hierdurch erhält er diese drey Facitte

6 Maaß vom Besten gelten ab Gr.

x Maaß vom Schlechtesten gelten cx Gr.

6 + x Maaß vom Vermischten gelten ad + xd Gr.

Er weis, wie schon gesagt ist, daß der Preis des Besten und des Schlechtesten zusammen genommen, dem Preise des Vermischten gleich sey. Daher setzt er sie gleich, $ab + cx = ad + xd$. Wird diese Gleichung aufgelöset, so giebt sie $x = \frac{(d-b)a}{c-d}$.

Setzt er nun statt der Buchstaben die Zahlen selbst; so ist $x = \frac{(d-b)a}{c-d} = \frac{(10-5)6}{5-4} = 30$ Maaß vom Schlechtesten.

Das gefundene Resultat $\frac{(d-b)a}{c-d}$ lehret ihn, wie er alle Aufgaben von der Art berechnen müsse, es sagt: man soll zur Differenz des Werths des Besten und Vermischten, zur Differenz des Werths des Schlechtesten und Vermischten, und zur gegebenen Anzahl Maaßen, die 4te geometrische Proportionalzahl suchen.

Dieser Mann hat also die Regel der Allegation, wenn sie noch nicht erfunden wäre, erfunden. Was in Bearbeitung dieser Aufgabe noch unverständlich ist, kann erst in der Folge seine Klarheit erhalten.

§. 120.

Es ist gleichgültig, ob man statt der gegebenen Größen die ersten Buchstaben des Alphabets wählt, oder ob man die gegebenen Zahlen selbst unverändert behält, und nur die gesuchten Zahlen durch die letzten Buchstaben ausdrückt.

§. 121.

Die Vortheile, welche die Rechnung mit Buchstaben liefert, sind:

1) Man

1) Man kann das ganze Verfahren einer Rechnung genau wieder übersehen, weil alles, was geschehen ist, durch Zeichen ausgedrückt worden.

2) Man kann die größeste Zahl durch einen Buchstaben ausdrücken und bearbeiten.

3) Die Multiplication und Division mit Buchstaben, erfordert weiter keine Mühe, als daß man die Buchstaben im ersten Falle bey einander ohne Zeichen schr ibt, im andern Falle sie Bruchweise setzt.

4) Weil man einem Buchstaben einen Werth beylegen kann, welchen man will; so stellet ein durch Buchstaben ausgedrückter Fall, alle möglichen Fälle von gleicher Art vor. Es ist also der Ausdruck durch Buchstaben ein allgemeiner Ausdruck.

5) Wenn man den Werth der unbekannten Größe gefunden hat; so ist der letzte Ausdruck durch Buchstaben immer eine Regel, nach welcher man alle Fälle von derselben Art berechnen kann.

§. 122.

Die Vortheile, welche ein Ausdruck durch Zahlen darbietet, sind:

1) Sollen viele Posten zu einander addirt, oder von einander abgezogen werden; so wird die Bearbeitung durch Buchstaben deswegen weitläuftig, weil man die Posten nicht immer, wie bey Zahlen in eine Summe sammlen kann. Z. E.

$$ab + b - ca + a + bc = h$$

Wenn in dieser Gleichung

$a = 4$
$b = 2$ so ist diese Gleichung durch Zahlen ausgedrückt $12 = h$
$c = 1$

2) Die Auflösung einer Gleichung, welche durch Buchstaben ausgedrückt ist, giebt den Werth der unbekann-

bekannten Größe in Buchstaben an. Diese müssen erst in Zahlen ausgedrückt, und nach der Vorschrift des Resultats in Zahlen berechnet werden. Eine Gleichung durch Zahlen ausgedrückt, giebt ohne Umschweif den Werth der unbekannten Größe in Zahlen.

3) Wenn man ein für allemal annimmt, daß man statt einer gegebenen Zahl eine jede andere Zahl setzen dürfe; so ist ein Ausdruck in Zahlen eben so allgemein, als ein Ausdruck in Buchstaben.

4) Sucht man eine Regel, nach welcher alle Fälle von derselben Art berechnet werden können, so findet sich auch diese in dem letzten Resultate in Zahlen; wenn man nur die vier Rechnungsarten nicht wirklich, sondern durch Zeichen verrichtet. Es ist aber gewiß, daß in diesem Falle und in weitläuftigen Ausarbeitungen, die Rechnung mit Buchstaben einen Vorzug behauptet.

Eben so gewiß ist es hingegen, daß in kleinern Ausarbeitungen, und wenn man keine Regel sucht, der Ausdruck in Zahlen vornehmlich deswegen um ein Beträchtliches kürzer ist, weil man das Gesuchte sogleich in Zahlen erhält.

§. 123.

Wenn nicht besondere Umstände es nothwendig machen, so werde ich von den Auflösungen der Gleichungen nichts sagen. Man findet alle Fälle da, wo von der Auflösung der Gleichungen geredet ist.

1) Man finde eine Zahl, welche, wenn sie durch 10 multiplicirt, oder wenn 10 zu ihr addirt wird, einerley giebt. x ist die Zahl.

Weil 10mal x, und 10 und x gleich seyn soll, so setze man beydes gleich.

Probe

Probe.

$1\frac{1}{9} + 10 = 11\frac{1}{9}$

10mal $1\frac{1}{9} = 11\frac{1}{9}$

$10x = 10 + x$

$9x = 10$

$x = 1\frac{1}{9}$

2) Man finde eine Zahl, welche, wenn sie durch 19 multiplicirt, oder 6 zu ihr addirt wird, eine und dieselbe Größe giebt.

$19x = x + 6$

$18x = 6$

$x = \frac{1}{3}$

3) Wenn man von dem 9ten Theil einer Zahl 13 abzieht, so bleibt 17 übrig; wie groß ist die Zahl? Antwort x.

$$\frac{x}{9} - 13 = 17$$

$$\frac{x}{9} = 30$$

$$x = 270$$

4) In einem Beutel habe ich $\frac{1}{4}$ meines Geldes, im zweyten $\frac{3}{8}$ meines Geldes, in beyden zusammen 100 Thlr., im dritten ich weis nicht wieviel, im vierten das Uebrige. Wie viel Thlr. sind in allen vier Beuteln? Antw. x Thlr.

$\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x = 100$ Thlr.

$\frac{5}{8}x = 100$

$5x = 800$

$x = 160$ Thlr.

5) Man finde vier Zahlen, die sich gegen einander verhalten, wie 2, 3, 7, 10, und deren Summe $1\frac{1}{2}$ ist.

Weil

Weil das Verhältniß der vier gesuchten Größen unter einander angegeben ist, so kann man sie mit einem Buchstaben benennen. Man nehme daher eine beliebige von den gegebenen Zahlen als x an, 2 sey x, und suche durch die Kettenregel die verhältnißmäßige Benennung der übrigen. Die Summe dieser gefundenen Größen, soll $1\frac{1}{2}$ gleich seyn. $x = 1$

		2	= x	
1	—	—	3	
2	—	—	x	Fac. $1\frac{1}{2}$ x
1	—	—	7	
2	—	—	x	Fac. $3\frac{1}{2}$ x
1	—	—	10	
2	—	—	x	Fac. 5 x
			Summe	11 x

Probe

11 x	=	$1\frac{1}{2}$		x	=	$\frac{6}{44}$
22 x	=	3		$1\frac{1}{2}$ x	=	$\frac{9}{44}$
x	=	$\frac{3}{22}$		$3\frac{1}{2}$ x	=	$\frac{21}{44}$
				5 x	=	$\frac{30}{44}$
				Summe		$1\frac{1}{2}$

Wenn man den Werth von x gefunden hat, so findet man den Werth der übrigen Größen durch die Kettenregel. Wie viel ist $1\frac{1}{2}$ x, wenn x $\frac{3}{22}$ ist? u. s. w.

6) Das Geld in einem Beutel besteht halb in Golde, $\frac{1}{4}$ in Gulden, $\frac{1}{8}$ in drey Groschenstücken, und 6 Thlr. in Matier. Wie viel Thlr. Geld sind in dem Beutel, und wieviel von jeder Sorte? Antwort x Thlr. sind in dem Beutel. Ist x das ganze Geld, so ist die Summe der bestimmten Theile ebenfalls das ganze Geld, folglich = x.

$\frac{1}{2}$ x

$\frac{1}{2}x$
$\frac{1}{4}x$
$\frac{1}{8}x + 6$

Summe $\frac{7}{8}x + 6 = x$
$7x + 48 = 8x$
$48 = x$

24 Thlr. Gold
12 = Gulden
6 = 3 Grst.
6 = Matier

S. 48 Thlr.

Wenn man einem jeden seiner Arbeiter 3 Thlr. giebt, so behält man 10 Thlr. übrig; giebt man einem jeden $4\frac{1}{2}$ Thlr., so fehlen zur völligen Bezahlung 12 Thlr. Wie viel sind Arbeiter? Antw. x Arbeiter.

Um das Geld doppelt auszudrücken, rechne man durch die Kettenregel aus, wie viel Thaler die x Arbeiter in beyden Fällen erhalten. Fügt man diesen Facitten dasjenige bey, was in einem Falle fehlte, im andern übrig war; so ist das ganze Geld doppelt ausgedrückt.

1 Thlr. — — x Arbeiter
1 Arbeit. — — 3 Thlr. Fac. $3x$

1 Thlr. — — x Arbeiter
1 Arbeit. — — $4\frac{1}{2}$ Thlr. Fac. $4\frac{1}{2}x$

$3x + 10 = 4\frac{1}{2}x - 12$
$10 = 1\frac{1}{2}x - 12$
$10 = \frac{3}{2}x - 12$
$20 = 3x - 24$
$44 = 3x$
Arbeiter $14\frac{2}{3} = x$

7) Es kauft jemand etliche Pfund Zucker; giebt er für 1 Pfund 7 Gr. so behält er 10 Gr. übrig; giebt er für 1 Pfund 8 Gr., so fehlen ihm zur Bezahlung 30 Groschen. Wie viel Pfund hat der Mann gekauft? Antw. x Pfund.

$7x + 10 = 8x - 50$
Pfund $40 = x$

Will

Will man wiſſen, wie viel Geld der Mann gehabt hat, ſo rechne man durch die Kettenregel aus, wie viel Gr. 40 Pfund koſten, da 1 Pfund 8 Gr. gilt. Weiter, wie viel Gr. 40 Pfund koſten, da 1 Pfund 8 Gr. gilt. Zum erſten Facitte addirt man nach Vorſchrift der Gleichung 10, vom andern Facitte zieht man 30 ab, ſo erhält man in beyden Fällen 290 Gr., und hiermit zugleich die Probe der Richtigkeit.

Hätte man gleich Anfangs das Geld des Käuffers finden wollen, ſo würde man ſein Geld x genannt, und die Pfunde durch die Kettenregel in beyden Fällen durch x ausgedrückt haben.

1 Pfund — — x — 10 Gr. $\quad x-10$
7 Gr. — — 1 Pfund Fac. $\quad \frac{\quad}{7}$

1 Pfund — — x + 30 Gr. $\quad x+30$
8 Gr. — — 1 Pfund Fac. $\quad \frac{\quad}{8}$

$$\frac{x-10}{7} = \frac{x+30}{8}$$

$$8x - 80 = 7x + 210$$
$$x = 290 \text{ Groſchen}$$

9) $\frac{1}{3}$ von meinem Gelde und 15 Thlr. iſt ſo viel, als $\frac{4}{7}$ von meinem Gelde, weniger 28 Thlr. Wie viel Geld habe ich? Antw. x Thlr.

$$\tfrac{1}{3}x + 15 \text{ Thlr.} = \tfrac{4}{7}x - 28$$
$$\tfrac{1}{3}x = \tfrac{4}{7}x - 43$$
$$5x + 645 = 12x$$
$$92\tfrac{1}{7} = x$$

10) Die Hälfte einer Geſellſchaft beſteht aus Theologen, $\frac{1}{5}$ aus Juriſten, nebſt 15 Damen, wie viel ſind überhaupt Perſonen in der Geſellſchaft? Antwort

wort x Perſonen. Die ganze Geſellſchaft x, iſt allen Theilen der Geſellſchaft gleich.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} + 15 = x$$

$$5x + 2x + 150 = 10x$$

$$7x + 150 = 10x$$

$$150 = 3x$$

$$\text{Perſonen } 50 = x$$

Theologen	25
Juriſten	10
Damen	15
Summe	50

11) 6 Schaafe verzehren in 8 Wochen 12 Himten
10 Ochſen — — 4 — 16 —
5 Pferde — — 2 — 20 —

Wie viel Wochen können { 20 Schaafe, 4 Ochſen, 10 Pferde } von 600 Himten leben? Antwort x Wochen.

Was ſind die 600 Himten? Sie ſind die Summe der Himten, welche alles Vieh in der geſuchten Zeit x verzehrt. Man rechne alſo durch die Kettenregel aus, wie viel Himten eine jede Art in der Zeit x verzehrt. Die Summe der gefundenen Himten iſt 600 Himten gleich.

1 Himten — — { 20 Schaafe, x Wochen }

6 Schaafe, 8 Wochen } — 12 Himten. Fac. 5x Himt.

1 Himten — — { 4 Ochſen, x Wochen }

10 Ochſen, 4 Woch. } — 16 Himten. Fac. $1\frac{3}{5}$x Himt.

1 Himten — — { 10 Pfund, x Wochen }

5 Pfund, 2 Wochen } — 20 Himten. Fac. 20x Himt.

Summe $26\frac{3}{5}$x Himt.

$$26\tfrac{3}{7}\,x \text{ Himten} = 600 \text{ Himten}$$
$$\frac{133x}{5} = 600 \text{ Himten}$$
$$133x = 3000$$
$$x = 22\tfrac{74}{133} \text{ Wochen}$$

Wie aber werden die $22\frac{74}{133}$ zu Wochen, da es doch Himten seyn sollten? Die Gleichung, $26\frac{3}{7}x$ Himten = 600 Himten, sagt: $26\frac{3}{7}$ Himten sind durch x Wochen multiplicirt, das Produkt ist 600 Himten gleich. Nachdem die Gleichung so aufgelöset ist, daß x allein auf einer Seite steht; so ist nunmehro bekannt geworden, daß x, oder die bisher unbekannte Anzahl Wochen, der Zahl $22\frac{74}{133}$ gleich sey, der Name dieser Zahl mag seyn, welcher es will. Die letzte Gleichung erhält immer den Namen von dem, was x ausdrückt. In der Kettenregel ist es nicht anders. Z. E. wie viel Thlr. kosten 4 Pfund, wenn 2 Pfund 2 Thlr. kosten?

1 Thlr. — — 4 Pfund
2 Pfund — — 2, Thlr.

streicht man die eine 2 gegen die andere weg, so bleibt in einer Columne nichts; 4 Pfund aber sind das Facit, nämlich 4 Thlr.

12) Man finde eine Zahl, deren Hälfte, deren Viertel, und deren Drittel zusammen genommen, um 8 größer, als die Zahl selbst ist. x ist die Zahl.

x
— +
2

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = x + 8$$

$$12x + 6x + 8x = 24x + 192$$

$$26x = 24x + 192$$

$$x = 96$$

Probe.

$$\frac{x}{2} = 48$$

$$x = 24$$

$$\frac{x}{4} = 32$$

$$\frac{x}{3}$$

Summe $104 = 96 + 8$

13) Man finde drey Zahlen, die ſich gegen einander wie 2, 3, 4, verhalten, und deren Summe 16 iſt. $2 = x$.

$$x$$
$$1\frac{1}{2}x$$
$$2x$$

Summe $4\frac{1}{2}x = 16$

$$\frac{9}{2}x = 16$$
$$9x = 32$$
$$x = 3\frac{5}{9}$$

$x = 3\frac{5}{9}$
$1\frac{1}{2}x = 5\frac{2}{9}$
$2x = 7\frac{1}{9}$

Summe 16

14) Dieſe Aufgabe anders ausgedrückt:

Ein Herr vermacht ſeinen Bedienten 2000 Thlr., hierein ſollen ſie ſich nach Verhältniß ihres Lohns theilen; wie viel bekömmt ein jeder? $20 = x$

Verwalter hat jährlich 50 Thlr. — $2\frac{1}{2}x$
Kammerdiener — 40 " — $2x$
Koch — — — 35 " — $1\frac{3}{4}x$
4 Diener, ein jeder 20 " — $4x$

Summe $10\frac{1}{4}x = 2000$ Th.
$41x = 8000$ "
$x = 195\frac{5}{41}$ "

Verwalter	—	—	$487\frac{33}{41}$ Thlr.
Kammerdiener	—		$390\frac{10}{41}$ =
Koch	—	—	$341\frac{19}{41}$ =
Vier Diener	—	—	$780\frac{20}{41}$ =
		Summe	2000 Thlr.

15) Man finde zwo Zahlen, deren Summe 47, die Differenz 13 ist. Eine Zahl ist x, die andere x — 13.

	x			
	x	—	13	
Summe	2x	—	13	= 47
	2x	=	60	
	x	=	30	

16) Harpax zählt seine Ducaten auf in ein Quadrat. Als das Quadrat voll war, blieben 284 Stück übrig. Darauf legt er einen Ducaten mehr in eine Reihe, und macht ein Quadrat; nun hat er zum völligen Quadrate 25 Stück zu wenig. Wie viel Stück Ducaten hat Harpax?

Aus der Aufgabe lassen sich die Ducaten doppelt ausdrücken, einmal, wenn man annimmt, er habe das erstemal x Ducaten in eine Reihe gelegt. Das Quadrat davon ist xx. Hier blieben aber 284 Stück übrig, folglich ist sein ganzes Geld xx + 284. Das zweyte mal legt er x+1 in eine Reihe. Das Quadrat davon ist xx+2x+1. An diesem Quadrate aber fehlten ihm 25 Stück, folglich ist sein ganzes Geld xx+2x+1−25.

xx + 2x + 1	—	25	= xx + 284	xx subtr.
2x	—	24	= 284	
2x	=	308		
x	=	154 in eine Reihe.		

Von

Von 154 das Quadrat gemacht, und die überbliebenen 284 Stück addirt, giebt 24000; als die Anzahl aller Ducaten.

17) a) giebt zum Handel 80 Thlr., b) 30, c) 10 Thlr.; es werden 200 Thlr. gewonnen, wie viel bekömmt ein jeder?

$10 = x$,	$12x = 200$	$10 = 16\frac{2}{3}$
$30 = 3x$	$x = 16\frac{2}{3}$ Thl.	$30 = 50$
$80 = 8x$		$80 = 133\frac{1}{3}$
S. $12x$		Summe 200 Thlr.

18) Wenn ich noch einmal ſo viel Geld hätte, als ich habe, uud noch viermal ſo viel als ich habe, ſo machte dieß mit meinem Gelde, das ich wirklich habe, 100 Thlr. Wie viel Geld habe ich? Antw. x Thlr.

$$x + 2x + 4x = 100$$
$$7x = 100$$
$$x = 14\frac{2}{7} \text{ Thlr.}$$

19) Einer ſprach zum andern: Hätte ich 10 Thlr. mehr, als ich habe, ſo hätte ich ſo viel als du; der andere ſpricht: Hätte ich 15 Thlr. mehr als ich habe, ſo hätte ich doppelt ſo viel als du. Wieviel Thlr. hat ein jeder? Einer hat x, der andere y Thlr.

Weil die Aufgabe ſo viele Gleichungen darbietet, als unbekannte Größen ſind; ſo iſt es eine beſtimmte Aufgabe; wie dieſe aufgelöſet werde, iſt vorne gezeigt.

$$x + 10 = y, \qquad y + 15 = 2x$$
$$y = 2x - 15$$
$$x + 10 = 2x - 15$$
$$25 = x$$

Setzt man den Werth von x nämlich 25 ſtatt x in die Gleichung $x+10=y$, ſo hat man $25+10=y$ oder $y=35$.

20) Ein Knabe sprach zum andern, gieb mir eins von deinen Eyern, so habe ich so viel als du. Der andere sprach: gieb mir eins von deinen Eyern, so habe ich doppelt so viel als du.

$$x + 1 = y - 1, \quad y + 1 = 2x - 2$$
$$x + 2 = y \qquad\qquad y = 3x - 3$$
$$x + 2 = 2x - 3 \qquad x = 5$$
$$5 = x \qquad\qquad y = 7$$

21) Es hat jemand zween Becher sammt einen Deckel, der 18 Thlr. werth ist. Wird der Deckel dem ersten Becher aufgesetzt, so ist er noch einmal so viel werth als der andere; wird er aber dem andern aufgesetzt, so ist er $\frac{1}{4}$ mehr werth als der erste. Wie viel ist jeder Becher werth? Antw. der erste x Thlr., der zweyte y Thlr.

$$x + 18 = 2y, \quad y + 18 = \tfrac{5}{4}x$$
$$\frac{x+18}{2} = y, \qquad y = \tfrac{5}{4}x - 18$$
$$\frac{x+18}{2} = \tfrac{5}{4}x - 18$$
$$4x + 72 = 10x - 144$$
$$216 = 6x$$
$$\text{Thlr. } 36 = x$$

Den gefundenen Werth von x in obige Gleichung statt x gesetzt, und die Gleichung aufgelöset, giebt den Werth von y.

$$36 + 18 = 2y$$
$$\text{Thlr. } 27 = y$$

22) Das

22) Das Quadrat des zehnten Theils von dem Vermögen eines Mannes, ist: 419904 Thlr. Wie groß ist das ganze Vermögen? Antw. x Thlr.

$$\frac{x}{10} \text{ mal } \frac{x}{10} = \frac{xx}{100} \qquad \frac{xx}{100} = 419904$$

$$\sqrt{xx} = \sqrt{41990400}$$

$$x = 6480 \text{ Thlr.}$$

23) Man hat einige Gulden, und 8 Stück Ducaten mehr als Gulden. Wenn man von dem Quadrate der Ducaten, das halbe Quadrat der Gulden subtrahirt; so bleibt 1984 übrig. Wie viel Gulden hat man? Antw x Gulden; so sind x + 8 Ducaten.

Man mache die Quadrate, und ziehe das halbe Quadrat der Gulden ab, wie es die Aufgabe fordert.

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x + 8 \\ \hline 8x + 64 \\ xx + 8x \\ \hline xx + 16x + 64 \end{array}$$

$$\frac{xx}{2} + 16x + 64 = 1984$$

$$xx + 32x + 128 = 3968$$

$$\sqrt{xx + 32x} = \sqrt{3840}$$

Zu dieser unreinen Gleichung muß, wie vorne gesagt ist, der vierte Theil des Quadrats, dessen Wurzel 32 ist, zu beyden Seiten addirt werden.

$$\sqrt{xx + 32x + 256} = \sqrt{4096}$$

$$x + 16 = + 64$$

$$x = 48 \text{ Gulden.}$$

24) Drey Personen nehmen ein Loos, auf welches 2000 Thlr. gewonnen wird. Der erste hat $\frac{5}{8}$, der zweyte $\frac{1}{4}$, der dritte $\frac{1}{8}$ von dem Loose. Wie viel bekömmt ein jeder vom Gewinne?

Man finde durch die Kettenregel, wie viel $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{8}$ ist, da $\frac{1}{4}$ x ist, die Summe der drey Größen sind die 2000 Thlr. durch x ausgedrückt.

$\frac{1}{4} = x$	$4x = 2000$	$\frac{1}{4} = 500$ Thlr.
$\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}x$	$x = 500$ Thlr.	$\frac{1}{2} = 1250$ "
$\frac{1}{8} = \frac{1}{2}x$		$\frac{1}{8} = 250$ "
S. $4x$		2000 Thlr.

25) Es will jemand ein geliehenes Capital von 300 Thalern in vier Terminen wieder bezahlen, den 2ten will er doppelt so viel als den ersten geben, den dritten doppelt so viel als den andern, und 2 Thlr. darüber, den vierten dreymal so viel als den dritten weniger 2 Thlr. Wie viel bezahlt er in jedem Termin? Antw. im ersten x Thlr.

1sten —	x	$x = 15\frac{15}{19}$
2ten —	$2x$	$2x = 31\frac{11}{19}$
3ten —	$4x + 2$	$4x + 2 = 65\frac{3}{19}$
4ten —	$12x - 2$	$12x - 2 = 187\frac{9}{19}$
Summe	$19x = 300$ Thlr.	Summe 300

$x = 15\frac{15}{19}$ Thlr.

26) Dren Mühlen mahlen, die erste in einer Stunde 1 Himten, die zweyte in einer Stunde 2 Himten, die dritte in einer Stunde drey Himten. In wie vielen Stunden mahlen alle drey Mühlen 12 Himten? Antwort in x Stunden.

Weil 12 Himten die ganze Arbeit aller Mühlen in der gesuchten Zeit x seyn soll; so rechne man durch die Kettenregel aus, wie viel Himten jede Mühle in x Stunden mahlet. Die Summe der erhaltenen Facitte ist ebenfalls die ganze Arbeit aller Mühlen, und den 12 Himten gleich.

$$6x = 12$$
$$x = 2 \text{ Stunden}$$

Um

Um die Probe zu machen, darf man nur ausrechnen, wie viel Himten jede Mühle in den gefundenen 2 Stunden mahlet. Die Summe der gefundenen Facitte wird zeigen, daß es 12 Himten ſind, welche alle Mühlen in 2 Stunden verarbeiten.

27) Drey Perſonen ſchreiben, der erſte in einer Stunde 1 Bogen, der zweyte in 2 Stunden 3 Bogen, der dritte in 2 Stunden 1 Bogen. In wie viel Stunden ſchreiben alle drey Perſonen 100 Bogen?

1 Bogen — — x Stunden
1 Stunde — — 1 Bogen } Fac. x Bogen

1 Bogen — — x Stunden
2 Stunden — — 3 Bogen } Fac. $1\frac{1}{2}$ x Bogen

1 Bogen — — x Stunden
2 Stunden — — 1 Bogen } Fac. $\frac{1}{2}$ x Bogen

Summe 3 x Bogen

$3x = 100$
$x = 33\frac{1}{3}$ Stunden

28) An einem Baue arbeiten 1 Meiſter, 3 Geſellen, 2 Burſche, 2 Handlanger.

Der Meiſter bekömmt jeden Tag — 18 Gr.
Ein Geſelle — — — — — 12 Gr.
Ein Burſche — — — — — 9 Gr.
Ein Handlanger — — — — 6 Gr.

Das ganze Tagelohn betrug am Ende 30 Thlr., wie viel Tage hat der Bau gedauret? Antwort x Tage.

Was ſind die 30 Thlr.? Sie ſind die Summe des Tagelohns aller Arbeiter in der Zeit x. Man rechne alſo durch die Kettenregel aus, wie viel Gr. 3 Geſellen in x Tagen erhalten, da ein Geſelle in einem Tage 12 Gr. bekömmt. Hat man auf gleiche Weiſe den Lohn der übrigen Arbeiter gefunden; ſo iſt die Summe der

Facitte nämlich 84x den 30 Thlrn., oder 1080 Gr. gleich.

$$84x = 1080$$
$$x = 12\frac{6}{7} \text{ Tage}$$

29) Man kauft für 720 Thlr. Silber; wenn man 12 Mark mehr erhalten hätte, so würde 1 Mark auf 10 Thlr. gekommen seyn. Wie viel Mark hat man gekauft? Antwort x Mark.

Der Werth von x + 12 Mark ist mit dem Bedinge den 720 Thlrn. gleich, wenn 1 Mark 10 Thlr. gekostet.

1 Thlr. — x + 12 Mark
1 Mark — 10 Thlr. Fac. $10x + 120 = 720$
$10x = 600$
$x = 60$ Mk.

Da 60 Mark 720 Thlr. gekostet; so läßt sich leicht finden, wie theuer 1 Mark gekommen.

30) Welche Zahl giebt durch a dividirt einen Quotienten, der so groß ist, als wenn b durch c multiplicirt wird? Antw. die Zahl x.

$\frac{x}{a} = bc$ $\qquad a = 5,\ b = 10,\ c = 7$

$x = abc$ $\qquad \frac{x}{5} = 7 \text{ mal } 10 = 70$
$x = 350$

Man drückt die gegebenen Buchstaben durch beliebige Zahlen, oder die gegebenen Zahlen durch beliebige Buchstaben aus, nachdem man das Gesuchte in Zahlen oder in Buchstaben verlangt.

31) Wel-

31) Welche Zahl giebt durch a dividirt einen Quotienten, der um b kleiner ist, als wenn c durch g multiplicirt wird? Die Zahl x.

$$\frac{x}{a} - b = cg$$
$$x - ab = aeg$$
$$x = acg + ab$$

32) Die 31ste Aufgabe anders vorgetragen.

Ein vierzigjähriger Mann vermacht einem jeden seiner 5 Brüder so viele 12 Thlr. als er Jahre alt ist. Es soll aber von eines jeden Theil 34 Thlr. für die Armen abgezogen werden; wie groß ist das ganze Vermächtniß? Antwort x Thlr.

$$\frac{x}{5} = 480 - 34$$
$$\frac{x}{5} = 446$$
$$x = 2230 \text{ Thlr.}$$

33) Was ist das für eine Zahl, deren achter Theil mit sich selbst multiplicirt, so groß als das Produkt ist, wenn $\frac{5}{2}$ mit sich selbst multiplicirt wird? Antw. x.

$$\frac{x}{8} \text{ mal } \frac{x}{8} = \frac{5}{2} \text{ mal } \frac{5}{2}$$
$$\frac{xx}{64} = \frac{25}{4}$$
$$xx = \frac{1600}{4}$$
$$\sqrt{xx} = \sqrt{400}$$
$$x = 20$$

Probe

$\frac{20}{8}$ mal $\frac{20}{8} = \frac{5}{2}$ mal $\frac{5}{2}$

34) Wenn

34) Wenn man die Länge eines Seils quadrirt, zu diesem Quadrate die Länge des Seils addirt, so ist die Summe 391250 Ellen; wie viel Ellen ist das Seil lang? Antw. x Ellen.

$$xx \div x = 391250$$
$$\sqrt{}\ xx + x + \tfrac{1}{4} = \sqrt{}\ 391250{,}25$$
$$x + \tfrac{1}{2} = 625\tfrac{1}{2}$$
$$x = 625 \text{ Ellen.}$$

35) Man kauft 12 Stück Tuch vor 185 Thlr., zwey Stück sind weiß, drey schwarz, sieben blau. Ein Stück schwarzes kostet 2 Thlr. mehr als ein Stück weißes, 1 Stück blaues 3 Thlr. mehr als ein Stück schwarzes; wie viel kostet jedes Stück?

Man drücke den Werth aller Stücke als 185 Thlr. noch einmal durch x aus. Um dieses thun zu können, nehme man an, 1 Stück weiß Tuch habe x Thlr. gekostet, so kostet ein Stück schwarzes x+2 Thlr., ein Stück blau x+5 Thlr. Weil man aber vom weißen zwey, vom schwarzen drey, vom blauen 7 Stücke hat, so rechne man durch die Kettenregel aus, was diese durch x ausgedrückt kosten, da der Preis von einem Stücke nunmehro bekannt ist. Die Summe dieser Preise ist der Summe 185 gleich.

1 Thlr. — — 2 Stück
1 Stück — — x Thlr. } Fac. 2x Thlr.

1 Thlr. — — 3 Stück
1 Stück — — x+2 Thlr. } Fac. 3x + 6 Thlr.

1 Thlr. — — 7 Stück
1 Stück — — x+5 Thlr. } Fac. 7x + 35 Thl.

$$12x + 41 = 185$$
$$12x = 144$$
$$x = 12 \text{ Thlr.}$$

1 Stück

1 Stück weiß Tuch	12	Thlr.	— 2	Stück	24	Thlr.
1 St. schwarz Tuch	14	=	— 3	=	42	=
1 Stück blau Tuch	17	=	— 7	=	119	=
				Summe	185	Thlr.

36) Was ist das für eine Zahl, welche, wenn sie halbirt, der halbe Theil quadrirt, hierzu die ganze Zahl weniger 3 addirt, diese Summe durch 5 multiplicirt, 3360 giebt? Antw. x ist die Zahl.

$$\frac{xx}{4} - x - 5$$

$$\frac{5xx}{4} - 5x - 15 = 3360$$

$$5xx + 20x - 60 = 13440$$
$$5xx + 20x = 13500$$
$$xx + 4x = 2700$$
$$\sqrt{xx + 4x + 4} = \sqrt{2704}$$
$$x + 2 = 52$$
$$x = 50$$

37) Zu einer Reise sind einige Thlr. bestimmt. Die Hinreise kostet $\frac{1}{4}$ dieser Thlr., die Rückreise $\frac{1}{3}$, der Ort des Aufenthalts $\frac{1}{8}$. Wenn man diese Theile in einander multiplicirt, kömmt 9216 Thlr. Wie viel Thlr. sind zur Reise bestimmt? Antw. x Thlr.

$$\frac{1x}{4} \text{ mal } \frac{1x}{3} \text{ mal } \frac{1x}{8} = \frac{xxx}{96} = 9216$$

$$\sqrt[3]{xxx} = \sqrt[3]{884736}$$
$$x = 96 \text{ Thlr.}$$

38) Eine Quelle füllet ein Behältniß in 6 Stunden, die andere in zweenen Tagen, die dritte in drey Tagen,

gen, die vierte in vier Tagen. In wie viel Stunden wird das Behältniß voll, wenn alle Quellen laufen? Antw. in x Stunden.

Weil alle Quellen das Behältniß in x Stunden einmal füllen sollen, so füllet eine Quelle in x Stunden nur einen Theil des Behältnisses. Die Summe der durch die Kettenregel gefundenen Theile, ist dem ganzen Behältnisse oder 1 gleich.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ — — } x \text{ Stunden} \\ 6 \text{ St. — — } 1 \end{array}\right\} \text{Fac. } \frac{x}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ — — } x \text{ Stunden} \\ 48 \text{ St. — — } 1 \end{array}\right\} \text{Fac. } \frac{x}{48}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ — — } x \text{ Stunden} \\ 72 \text{ St. — — } 1 \end{array}\right\} \text{Fac. } \frac{x}{72}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ — — } x \text{ Stunden} \\ 96 \text{ St. — — } 1 \end{array}\right\} \text{Fac. } \frac{x}{96}$$

$$\text{Summe } \frac{61x}{288}$$

$$\frac{61x}{288} = 1$$

$$61x = 288$$

$$x = 4\tfrac{44}{61} \text{ Stunden.}$$

39) Eine Zahl finden, daß, wenn man a zu ihr addirt, die Summe durch b dividirt, der Quotient c sey. x ist die Zahl.

$$\frac{x+a}{b} = c$$

$$x + a = cb$$

$$x = cb - a$$

40) Die

40) Die 39ste Aufgabe anders vorgetragen.

Ein Mann sprach zu 5 Bettlern: wenn ich noch 9 Gr. hätte, so könnte ich einem jeden 13 Gr. geben; wie viel Gr. hat der Mann gehabt? Antw. x Gr.

$$\frac{x+9}{5} = 13$$
$$x + 9 = 65$$
$$x = 56 \text{ Gr.}$$

41) Nachdem jemand den fünften und dritten Theil seines Geldes verspielt hat, behält er noch 14 Thlr. übrig. Wie viel Geld hat er gehabt? Antwort x Thlr.

$$x - \frac{x}{5} - \frac{x}{3} = 14$$
$$15x - 3x - 5x = 210$$
$$7x = 210$$
$$x = 30 \text{ Thlr.}$$

42) Man finde eine Zahl, deren dritter Theil 17 mehr ist, als der vierte.

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 17$$
$$4x = 3x + 204$$
$$x = 204$$

43) Eine mir nicht bekannte Zahl ward durch 12 dividirt, der Quotient war 32. Was war es für eine Zahl? Antwort x.

$$\frac{x}{12} = 32$$
$$x = 384$$

44) Man

44) Man legt einige Thlr. an, um folgende Waaren zu bezahlen. Der gekaufte Zucker kostet $\frac{1}{4}$, der Coffee $\frac{1}{3}$, der Reis $\frac{1}{12}$, der Thee $\frac{1}{6}$ von dem angelegten Gelde, und die Mandeln kosten $\frac{15}{2}$ Thlr. Wie viel Thlr. hat man für alles dieses angelegt? Antwort x Thlr.

Die Summe aller Theile ist dem ganzen Gelde x gleich.

$\frac{1}{4}x$
$\frac{1}{3}x$
$\frac{1}{12}x$
$\frac{1}{6}x + \frac{15}{2}$

Summe $\frac{5}{6}x + \frac{15}{2}$

$$\frac{5x}{6} + \frac{15}{2} = x$$
$$10x + 90 = 12x$$
$$90 = 2x$$
$$45 \text{ Thlr.} = x$$

Probe.

Zucker — —	$11\frac{1}{4}$	Thlr.
Coffee — —	15	"
Reis — —	$3\frac{3}{4}$	"
Thee — —	$7\frac{1}{2}$	"
Mandeln —	$7\frac{1}{2}$	"
Summe	45	Thlr.

45) Der Fuß einer Säule ist hoch $5\frac{1}{2}$ Fuß, der Stamm hält die Hälfte, das Capitäl $\frac{1}{16}$, das Gebälke $\frac{1}{4}$ der ganzen Höhe. Wie hoch ist die ganze Säule? Antwort x Fuß.

$$\frac{13x}{16} + \frac{11}{2} = x$$
$$26x + 176 = 32x$$
$$176 = 6x$$
$$29\frac{1}{3} \text{ Fuß} = x$$

46) Man verlangt von etlichen Pfunden Garn 100 Ellen Leinewand, der Weber sagt: es wären 5 Pfund

zu

zu wenig; man will daher nur 80 Ellen haben, so aber bleiben 3 Pfund übrig. Wie viel Pfund Garn waren es? Antw. x Pfund.

In der Aufgabe sind zwar die Pfunde Garn schon doppelt ausgedrückt, nämlich durch $x+5$ und $x-3$, allein diese verschiedenen Ausdrücke einer Sache, sind sich deswegen nicht gleich, weil $x+5$ hundert, $x-3$ aber achtzig Ellen geben. Man rechne daher durch die Kettenregel aus, wie viel Pfund auch im zweyten Falle zu 100 Ellen erfordert werden, wenn zu 80 Ellen $x-3$ gehören. Das erhaltene Facit macht beyde Fälle, auch in den Umständen gleich.

1 Pfund — — 100 Ellen
80 Ellen — — $x-3$ Pfund } Fac. $\frac{10x-30}{8}$ Pf.

$$\frac{10x-30}{8} = x+5$$

$$10x - 30 = 8x + 40$$

$$2x = 70$$

$$x = 35 \text{ Pfund.}$$

47) Ein Vater hinterläßt seinen eilf Kindern 3600 Thlr., mit dem Befehle, daß eine jede Tochter 360, ein jeder Sohn 300 Thlr. erhalten solle. Bey der Theilung gieng das Vermögen gerade auf; wie viel Söhne und wie viel Töchter waren da? Antwort x Töchter, $11-x$ Söhne.

Was sind die 3600 Thlr.? Sie sind die Summe von dem, was alle Töchter und alle Söhne bekommen. Man rechne daher aus, wie viel x Töchter, und $11-x$ Söhne bekommen. Die Summe der erhaltenen Facitte ist den 3600 Thlrn. gleich.

1 Thlr. — — x Töchter
1 Tochter — — 360 Thlr. } Fac. + 360x
1 Thlr. — 1 — x Söhne
1 Sohn — 300 Thlr. } Fac. 3300 — 300x

Summe 3300 + 60x

3300 + 60x = 3600
60x = 300
x = 5 Töcht.
6 Söhne

48) In einer Stadt liegen 300 Mann, theils Reuter, theils Infanteristen; diese kosten zusammen monathlich 1800 Thlr, ein Infanterist bekömmt 5, ein Reuter 8 Thlr. Wie viel Reuter und wie viel Infanteristen waren in der Stadt? Antwort x Infanterie, 300 — x Reuter. Man sehe die 47ste Aufgabe.

2400 — 3x = 1800
600 = 3x
Infanterie 200 = x
Reuter 100

49) Ein Mahler verspricht neun Gemählde von gleichem Werthe, für einen silbernen Becher, der so gleich gegeben wird, nebst 36 Thlr. zu verfertigen. Nachdem er zwey fertig hat, entweicht er, und behält dafür den Becher, doch so, daß er 6 Thlr. wieder zurück schickt. Wie hoch hat er den Becher geschätzt? Antwort x Thlr.

Da der Mahler für zwey Bilder x — 6 Thlr. genommen hat, so wollen wir ausrechnen, wie viel er für zwey Bilder nach dem getroffenen Contracte hätte nehmen sollen, und beydes einander gleich stellen.

1 Thlr. — — 2 Bilder 2x
9 Bilder — — x + 36 Thlr. Fac. — + 8
9

2x

$$\frac{2x}{9} + 8 = x - 6$$

$$\frac{2x}{9} + 14 = x$$

$$2x + 126 = 9x$$

$$126 = 7x$$

Thlr. $18 = x$

50) Man hat drey Fässer, wird das zweyte aus dem ersten gefüllet, so bleibt im ersten $\frac{2}{3}$ übrig; wird das dritte aus dem ersten gefüllet, so bleibt $\frac{5}{9}$ übrig; wird aber das erste aus den beyden andern gefüllet; so fehlen 8 Ohm. Wie viel Ohm hält jedes von diesen Fässern? Antwort das erste x Ohm, das zweyte $\frac{1}{3}x$ das dritte $\frac{4}{9}x$.

$\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}x = x - 8$ Ohm

$\frac{7}{9}x = x - 8$

$7x = 9x - 72$

$0 = 2x - 72$

$72 = 2x$

36 Ohm $= x$

$x = 36$ Ohm

$\frac{1x}{3} = 12$

$\frac{4x}{9} = 16$

Nachdem auf beyden Seiten 7x subtrahirt waren, erhielte man auf einer Seite 0, folglich war auf der andern Seite der Werth der Größe mit Plus, dem Werthe der Größe mit Minus gleich. In solchen Fällen wirft man die negative Größe, mit entgegen gesetzten Zeichen, in die andere Hälfte.

51) Von $\frac{3}{4}$ einer unbekannten Zahl $\frac{2}{3}$ der Zahl subtrahirt, bleibt der Rest 10, wie groß ist die Zahl? Antwort x.

$$\frac{3x}{4} - \frac{2x}{3} = 10.$$

$$9x - 8x = 120$$

$$x = 120$$

52) Drey Arbeiter verdienen zusammen 120 Tagelohne, der erste bekömmt täglich 20 Gr., der zweyte 24 Gr., der dritte 30 Gr.; es erhält aber einer so viel als der andere. Wie viel Tage hat ein jeder gearbeitet? Antwort der erste x Tage, der zweyte y Tage, der dritte 120—x—y Tage.

Man rechne aus, wie viel Groschen ein jeder in den bestimmten Tagen erhalten habe. Die gefundenen Facitte sind sich deswegen gleich, weil einer so viel als der andere bekommen.

1 Gr. — — x Tage
1 Tag — — 20 Gr. Fac. 20x

1 Gr. — — y Tage
1 Tag — — 24 Gr. Fac. 24y

1 Gr. — 120—x—y
1 Tag — 30 Gr. Fac. 3600—30x—30y

Weil x und y zwo unbekannte Größen sind, so muß man auch zwo Gleichungen machen.

$$20x = 24y, \qquad 24y = 3600 - 30x - 30y$$

$$\frac{20x}{24} = y \qquad 54y = 3600 - 30x$$

$$y = \frac{3600 - 30x}{54}$$

$$\frac{20x}{24} = \frac{3600-30x}{54}$$

$$1080x = 86400 - 720x$$

$$1800x = 86400$$

$$x = 48 \text{ Tage.}$$

Setzt man den gefundenen Werth von x, statt x 20mal in die Gleichung $20x = 24y$, so erhält man

$$960 = 24y$$

$$y = 40 \text{ Tage}$$

die Summe von beyden, von 120 abgezogen giebt des Dritten Tage. = 32.

53) Ein Mann giebt einem Bettler $\frac{1}{6}$ seines Geldes und 4 Gr. darüber, dem andern auch $\frac{1}{6}$ vom Reste und 8 Gr.; dem dritten auch $\frac{1}{6}$ vom Reste und 12 Gr u. s. w. bis sein Geld alle ist. Ein Bettler bekam so viel als der andere; wie viel waren der Bettler, und wie viel Geld hatte der Mann? Antwort x Gr.

$\frac{1}{6}+4$ ist ein eben so grosser Theil vom ganzen Gelde x, als es $\frac{1}{6}$ vom Reste und 8 Gr. ist, weil ein Bettler so viel als der andere bekommen. Man drücke also was ein jeder erhalten hat, durch x aus.

Der erste bekam $\frac{1}{6}+4$, ist $= \frac{x}{6} + 4$

bleibt Rest $= \frac{5x}{6} - 4$

hiervon $\frac{1}{6}$ und 8 Gr. ist $= \frac{5x}{36} + \frac{4}{6} + 8$

$$\frac{x}{6} + 4 = \frac{5x}{36} - \frac{4}{6} + 8$$

$$\frac{x}{36} = -\frac{4}{6} + 4$$

$$6x = -144 + 864$$

$$6x = 720$$

$$x = 120 \text{ Groschen.}$$

Durch die Kettenregel findet man nunmehro leicht, daß ein Bettler 24 Gr. erhalten habe. Dividirt man durch diese 24 obige 120 Gr., so zeigt sich, daß fünf Bettler da gewesen sind. Weil der Quotient 5 ist, und kein Rest in der Division übrig bleibt.

54) Eine Mauer ist $3\frac{1}{2}$ mal so lang als dick, und 5mal so hoch als lang. Jeder Cubicfuß kostet so viele Thlr. als die Dicke Fuß hat, die ganze Mauer kostet 980 Thlr. Wie dick, lang und hoch ist die Mauer? Antwort die Dicke ist x Fuß, die Länge $3\frac{1}{2}x$, die Höhe $3\frac{1}{2}x$.

Um den Werth der ganzen Mauer, als 980 Thlr. noch einmal durch x auszudrücken, multiplicire man die durch x bestimmte Dicke, Länge und Höhe durch einander, so erhält man den körperlichen Inhalt der Mauer, nämlich $24\frac{5}{4}xxx$ Cubicfuß. Jeder dieser Füße kostet nach der Aufgabe x Thlr., folglich giebt die Multiplication der Cubicfüße durch x, den Werth der ganzen Mauer; welcher 980 Thlr. gleich ist.

$$24\frac{5}{4}xxxx = 980$$

$$245xxxx = 3920$$

$$\sqrt{}xxxx = \sqrt{}16$$

$$\sqrt{}xx = \sqrt{}4$$

$$x = 2$$

Weil

Weil die unbekannte Größe sich in der vierten Potenz zeigt; so muß die Quadratwurzel zweymal ausgezogen werden, um x zu erhalten.

55) Aus der gegebenen Summe und dem gegebenen Produkte zwoer Zahlen, die Zahlen selbst zu finden. Gesuchte Zahlen = x, y. Summe 22, Produkt 117.

$$x + y = 22, \quad xy = 117$$

$$y = 22 - x, \quad y = \frac{117}{x}$$

$$22 - x = \frac{117}{x}$$

$$22x - xx = 117$$

Diese letzte Gleichung ist unrein, wie sie aufgelöset werde, ist vorne gezeigt. Man thut aber wohl, wenn man um xx positiv zu erhalten, die ganze Gleichung verwechselt.

$$-117 = xx - 22x$$

$$+4 = +xx - 22x + 121$$

$$2 = x - 11 \qquad x = 13$$

$$13 = x \qquad y = 9$$

56) Wenn wir beyde unser Geld zusammen werfen, so können wir einen Garten für 92 Thlr. miethen; wenn wir aber unser Geld mit einander multipliciren, so können wir ihn für 672 Thlr. kaufen. Wie viel Geld hat ein jeder? erste = x, zweyte = y.

Diese Aufgabe ist die vorige, nur anders ausgedrückt.

$$x + y = 92, \quad xy = 672$$

$$x = 92 - y, \quad x = \frac{672}{y} \qquad y = 84 \text{ Thl.}, \quad x = 8 \text{ ,}$$

$$92 - y = \frac{672}{y}$$

$$92y - yy = 672$$

$$-672 = yy - 92y$$

$$\sqrt{1444} = \sqrt{yy - 92y + 2116}$$

$$38 = y - 46$$

$$84 = y$$

57) Aus der gegebenen Summe zwoer Zahlen, und dem gegebenen Quotienten einer Zahl in die andere, die Zahlen selbst zu finden. x sey die eine, y die andere Zahl, 7 der Quotient, und 48 die Summe.

$$x + y = 48, \quad \frac{x}{y} = 7$$

$$x = 48 - y, \quad x = 7y$$

$$48 - y = 7y$$

$$48 = 8y$$

$$6 = y$$

Den Werth von y statt y in obige Gleichung gesetzt, giebt

$$x + 6 = 48$$

$$x = 42$$

Diese Aufgabe anders ausgedrückt.

58) Eine Pfanne fasset 18 Eimer. In die Pfanne und den Eimer gehen zusammen 570 Maaß. Wie viel Maaß fasset die Pfanne, und wie viel Maaß der Eimer? Antwort, die Pfanne fasset y, der Eimer x Maaß.

$\frac{y}{x} = 18$ Eimer, $x + y = 570$ Maaß

$y = 18x$, $y = 570 - x$

$18x = 570 - x$

$19x = 570$

$x = 30$ Maaß

$y = 540$ Maaß.

59) Es wird das Produkt und die Differenz zwoer Zahlen gegeben, man soll die Zahlen selbst finden. Die Zahlen sind x und y, Produkt $= 120$, Differenz $= 2$.

$xy = 120$, $x - y = 2$

$x = \frac{120}{y}$, $x = 2 + y$

$2 + y = \frac{120}{y}$

$yy + 2y = 120$

$\sqrt{yy + 2y + 1} = \sqrt{121}$

$y + 1 = 11$

$y = 10$

Den Werth von y, nämlich 10, in obige Gleichung statt x gesetzt.

$x - 10 = 2$

$x = 12$

Diese Aufgabe anders ausgedrückt.

60) Ein reisender Herr giebt für sich und seine Bedienten in einem Gasthofe jeden Tag, ich weiß nicht wie viel Thlr. Er ist aber 6 Tage länger da gewesen, als er jeden Tag Thlr. giebt. Am Ende bezahlt er 135 Thlr. Wie viel Tage ist er da gewesen? und wie viel Thlr. hat er jeden Tag bezahlt? Antwort x Tage, y Thlr.

Man rechne aus, wie viel Thlr. er in x Tagen giebt, da ein Tag y Thlr. kostet. Das Facit xy ist 135 Thlr. gleich.

$$xy = 135, \quad x - y = 6$$

Die Auflösung giebt, daß der Herr 15 Tage da gewesen, und jeden Tag 9 Thlr. bezahlet habe.

61) Aus dem gegebenen Produkte und Quotienten zwoer Zahlen, die Zahlen selbst zu finden.

Die Zahlen sind x und y, Quotient = 8, Produkt = 392.

$$\frac{x}{y} = 8, \qquad xy = 392$$

$$x = 8y, \qquad x = \frac{392}{y}$$

$$8y = \frac{392}{y}$$

$$8yy = 392$$

$$yy = 49$$

$$y = 7$$

$$x = 56$$

Diese Aufgabe anders ausgedrückt.

62) Doris sprach zu einigen Armen: Wenn ich einem jeden von euch 2 Thlr. gebe, so bekommt ihr alle mein Geld; wenn ich aber einem jeden so viel geben wollte, als ich habe; so müßte ich 1058 Thlr. haben. Wie viel Thlr. hat Doris? und wie viel waren Arme? Antwort x Arme.

Was alle Arme im ersten Falle erhalten, ist das ganze Geld, was Ein Armer im letzten Falle erhält, ist ebenfalls das ganze Geld. Man rechne durch die Ket-

tenre-

tenregel beyde Fälle aus, so erhält man einen doppelten Ausdruck von einer Sache.

1 Thlr. — — x Arme
1 Armer — — 2 Thlr. } Fac. 2x

1 Thlr. — — 1 Armer
x Arme — — 1058 Thl. } Fac. $\frac{1058}{x}$

$$2x = \frac{1058}{x}$$
$$2xx = 1058$$
$$\sqrt{xx} = \sqrt{529}$$
$$x = 23 \text{ Arme.}$$

63) Ein Bothe der täglich 7 Meilen geht, wird nach acht Tagen einen andern Bothen, der täglich 5 Meilen gehet, nachgeschickt, in welchem Tage hohlt der zweyte den ersten ein? Antwort in x Tagen.

Da der andere Bothe in x Tagen so viel Meilen zurück legt, als der erste in x+8 Tagen zurück legt; so rechne man die Meilen eines jeden aus, und setze die Facitte gleich.

1 Meilen — — x Tage
1 Tage — — 7 Meilen } Fac. 7x

1 Meilen — x+8 Tage
1 Tag — 5 Meilen } Fac. 5x + 40

$$7x = 5x + 40$$
$$2x = 40$$
$$x = 20 \text{ Tagen.}$$

64) In welcher Meile wird der zweyte Bothe der 63sten Aufgabe, den ersten einhohlen? Antwort in x Meilen.

Die

Die Tage, welche der erste auf x — 40 Meilen gehet, sind den Tagen gleich, welche der zweyte auf x Meilen geht, daher rechne man die Tage aus, und setze sie gleich.

1 Tag — x − 40 Meilen
5 Meil. — 1 Tage } Fac. $\frac{x}{5}$ — 8,

1 Tag — — x Meilen
7 Meil. — — 1 Tage } Fac. $\frac{x}{7}$

$$\frac{x}{5} - 8 = \frac{x}{7}$$
$$7x - 280 = 5x$$
$$2x = 280$$
$$x = 140 \text{ Meilen.}$$

Hätte man wissen wollen, auf welcher Meile, vom ersten Bothen angezehlt, sie sich einhohlen würden, so gieng der erste in der Zeit x Meilen, in welcher der zweyte x + 40 Meilen gieng; und die Gleichung wäre:

$$\frac{x+40}{7} = \frac{x}{5}, \quad x = 100$$

65) Zwey Bothen die 360 Meilen von einander sind, gehen zu gleicher Zeit ab, und gegen einander, der eine jeden Tag 5, der andere 3 Meilen. An welchem Tage begegnen sie sich? Antwort in x Tagen.

Weil einer sowol als der andere x Tage geht, und beyder Weg zusammen genommen den 360 Meilen gleich ist; so rechne man die Meilen eines jeden in x Tagen aus, und setze die Summe der Facitte = 360.

$$3x + 5x = 360$$
$$8x = 360$$
$$x = 45 \text{ Tagen.}$$

66) Auf

66) Auf welcher Meile begegnen sie sich? Antw. x Meile. Ein Bothe geht x Meilen, der andere 360 — x Meilen; die Tage, die ein jeder auf seinem Wege zubringet, sind sich deswegen gleich, weil beyde zugleich abgehen, und sich zugleich begegnen. Man rechne daher die Tage durch die Kettenregel aus, welche ein jeder auf seinem Wege zubringt, und setze die gefundenen Facitte gleich.

1 Tage — — x Meilen
5 Meilen — — 1 Tage } Fac. $\frac{x}{5}$

1 Tage — 360 — x Meilen
3 Meilen — 1 Tage } Fac. 120 — $\frac{x}{3}$

$$\frac{x}{5} = 120 - \frac{x}{3}$$
$$3x = 1800 - 5x$$
$$8x = 1800$$
$$x = 225 \text{ Meilen}$$

Die vier letzten Aufgaben von den Bothen, dienen nicht allein, die Zusammenkunft bewegter Körper zu bestimmen, wenn sie sich mit verschiedener Geschwindigkeit in gleicher, oder entgegengesetzter Richtung bewegen; sondern sie lassen sich auch auf sehr viele andere Fälle, die im gemeinem Leben vorfallen, anwenden. Um dieses zu zeigen, will ich zu einer jeden dieser Aufgaben andere Gegenstände wählen.

Die 63ste Aufgabe anders ausgedrückt.

67) Ein Mann verleiht ein Capital von 500 Thlr. zu vier von hundert Zinse. Nach $3\frac{1}{2}$ Jahre verleiht er ein ander Capital von 480 Thlrn. zu 5 von hundert Zinse. Die Zinsen von beyden Capitalen laufen mit einander fort. Nach wie vielen Jahren haben beyde

Capi-

Capitale gleichviel Zinse eingebracht? Antwort, das zweyte Capital sey x Jahre, so ist das erste $x + 3\frac{1}{2}$ Jahr.

1 Zinse — — { 480 Thlr. / x Jahren

100 Thlr. / 1 Jahre } — — 5 Zinse Fac. 24x

1 Zinse — — { 500 Thlr. / $x+\frac{7}{2}$ Jahren

100 Thlr. / 1 Jahr } — — 4 Zinse Fac. $20x+\frac{140}{2}$

$$24x = 20x + \frac{140}{2}$$
$$4x = \frac{140}{2}$$
$$8x = 140$$
$$x = 17\frac{1}{2} \text{ Jahr}$$

Man darf den Nenner 2, nicht wie gewöhnlich ist, in die andere Columne werfen, weil der Nenner 2 nicht die ganze Größe $x+7$, sondern nur blos die 7 dividirt.

Die 64ste Aufgabe anders ausgedrückt.

68) Ein Mann schreibt täglich 5 Bogen. Nachdem er schon 10 Tage gearbeitet hat, fängt ein anderer, der täglich 7 Bogen schreibt, zu arbeiten an. Wie viel Bogen hat ein jeder geschrieben, wenn beyder Arbeit gleich ist? Antwort x Bogen.

1 Tage — — x Bogen / 7 Bogen — — 1 Tage } Fac $\frac{x}{7}$

1 Tag — $x-50$ Bogen / 5 Bogen — — 1 Tag } Fac. $\frac{x-50}{5}$

$x-50$

$$\frac{x-50}{5} = \frac{x}{7}$$

$$7x - 350 = 5x$$
$$2x = 350$$
$$x = 175 \text{ Bogen}$$

Die 65ste Aufgabe anders ausgedrückt.

69) Man verleiht zu gleicher Zeit zwey Capitale, eins von 500 Thlr. zu vier von hundert Zinse, das andere von 750 Thlr. zu fünf von hundert. In wie viel Jahren werden beyde Capitale zusammen $102\frac{1}{2}$ Thlr. Zinse gebracht haben? Antwort in x Jahren.

1 Zinse — — { 500 Thlr. / x Jahren

100 Thlr. / 1 Jahr } — — 4 Zinse Fac. 20x

Das zweyte Capital giebt 30x Zinse.

$$50x = 102\frac{1}{2}$$
$$50x = \frac{205}{2}$$
$$100x = 205$$
$$x = 2\frac{1}{20} \text{ Jahr}$$

Die 66ste Aufgabe anders ausgedrückt.

70) Zwey Maurer verfertigen eine Mauer die 1000 Cubicfuß hält, einer macht täglich 30, der andere in 3 Tagen 100 Cubicfuße. Wie viel Fuß hat ein jeder an der Mauer gemacht? Antwort einer x Fuß, der andere 1000 — x Fuß.

1 Tage — 1000 — x Fuß / 30 Fuß — — 1 Tage } Fac. $\frac{1000-x}{30}$

1 Tage — — x Fuß / 100 Fuß — — 3 Tage } Fac. $\frac{3x}{100}$

$1000-x$

$$\frac{1000-x}{30} = \frac{3x}{100}$$

$$100000 - 100x = 90x$$

$$100000 = 190x$$

$$x = 526\tfrac{6}{19} \text{ Fuß.}$$

Zieht man den gefundenen Werth von x von 1000 ab, so erhält man die Arbeit des andern; oder man nennet die Arbeit desjenigen, der in einem Tage 30 Fuß macht, x, so sagt die Auflösung wie viel dieser verfertigt habe. Addirt man beyder Arbeit zusammen, so muß sich nothwendig in der Summe der Inhalt der ganzen Mauer zeigen. Ueberhaupt, ist eine von den unbekannten Größen bekannt geworden, so läßt sich durch solche der Werth der übrigen unbekannten Grössen so leicht finden, daß es überflüßig wäre, ihren Werth immer anzugeben. Die Probe wird sich ebenfalls einem jeden, der sie nur machen will, selbst darbieten.

71) Wenn man den zehnten Theil eines zu vier von hundert Zinse verliehenen Capitals, mit einer einjährigen Zinse dieses unbekannten Capitals multiplicirt, so erhält man 2560 Thlr. Wie groß ist das Capital? Antwort x Thlr.

Findet man durch die Kettenregel, wie viel Zinse x Thlr. geben, und multiplicirt das gefundene durch den zehnten Theil des Capitals x durch $\frac{x}{10}$; so erhält man den zweyten Ausdruck von 2560.

1 Zinse	—	—	x Thlr.	$\frac{4x}{100}$
100 Thlr.	—	—	4 Zinse.	Fac.

$$\frac{4xx}{1000} = 2560$$

$$4xx = 2560000$$

$$\sqrt{xx} = \sqrt{640000}$$

$$x = 800 \text{ Thlr.}$$

Wenn ein Capital, oder eine andere würkende Ursache auf eine gegebene Zeit berechnet werden soll; so ist das Produkt der Zeit in die würkende Ursache die bestimmte Größe von beyden. Z. E. 100 Thlr. Capital werden auf 10 Jahre verliehen, so ist der Werth von beyden 1000; dieß Produkt ist so viel, als wenn 1 Thlr. 1000 Jahr, oder 1000 Thlr. 1 Jahr verliehen würde.

1000 Thlr 1 Jahr = 1 Thlr. 1000 Jahr = 100 Thlr. 10 Jahr; das Produkt kann Thlr. und auch Jahre bedeuten.

Die nächstfolgenden drey Aufgaben findet man im ersten Theile.

72) Ein Flecken muß des Jahrs 40 Mann, 30 Tage lang zum Herrndienste schicken. Es kommen zum 1sten 15 Mann 10 Tage, zum 2ten 16 Mann 20 Tage, zum 3ten 12 Mann 15 Tage. Nun erscheint ein Befehl, so viel Mann zu schicken, daß der übrige Dienst in 11 Tagen vollendet sey. Wie viel Mann müssen hingesandt werden? Antwort x Mann.

Es müssen arbeiten 40 Mann 30 Tage = 1200

Es haben gearbeitet
1) 15 Mann 10 Tage = 150
2) 16 " 20 " = 320
3) 12 " 15 " = 180
Summe 650

1200
650
Restirt 550

Der Rest 550 ist das Produkt der noch fehlenden Mannschaft x, in der noch fehlenden Zeit. Das Produkt der gesuchten Mannschaft x in den bestimmten 11 Tagen, ist dasselbe, folglich ist

$$11x = 550$$
$$x = 50 \text{ Mann.}$$

73) Einer ist dem andern 1200 Thlr. nach 4 Monaten zu bezahlen schuldig, bezahlt aber sogleich 800 Thlr.; wie lange darf er nun die noch restirenden 400 Thlr. behalten? Antwort x Monate.

Diese 400 Thlr. durch die unbekannte Zeit x multiplicirt, soll so groß seyn, als wenn 1200 Thlr. durch vier Monate multiplicirt sind. Daher mache man beyde Produkte, und setze sie gleich.

1200 Thlr. mal 4 = 8400, $400x = 4800$
800 $x = 12$ Mon.

400 Thlr. mal $x = 400x$,

74) Einer ist dem andern ohne Zinse 600 Thlr. nach vier Monaten, und 900 Thlr. nach sechs Monaten zu bezahlen schuldig; er will aber beyde Posten auf einmal entrichten, wie lange kann er beyde Capitale behalten? Antwort x Monate.

Sollen beyde Posten auf einmal bezahlt werden, so muß man sie addiren.

600 Thlr.	4 Monate	=	2400
900 Thlr.	6 Monate	=	5400
Summe 1500		Summe	7800

$$1500x = 7800$$
$$x = 5\tfrac{1}{5} \text{ Monat}$$

75) Man kauft etliche Pfund Zucker, und etliche Pfund Coffeebohnen; $\frac{3}{4}$ von den Pfunden des Coffees, sind

sind $\frac{1}{3}$ von den Pfunden des Zuckers; und $\frac{1}{6}$ vom Zucker ist die Hälfte vom Coffee weniger 2 Pfund. Wie viele Pfunde Zucker, und wie viele Pfunde Coffee hat man gekauft? Antwort x Pfund Zucker, y Pfund Coffee.

$$\frac{3}{4}y = \frac{x}{3}, \quad \frac{x}{6} = \frac{y}{2} - 2, \quad x = 36 \text{ Pf.}, \quad y = 16,$$

$$9y = 4x, \quad 2x = 6y - 24$$

$$y = \frac{4x}{9}, \quad \frac{2x+24}{6} = y$$

$$\frac{4x}{9} = \frac{2x+24}{6}$$

$$24x = 18x + 216$$

$$6x = 216$$

$$x = 36 \text{ Pfund}$$

76) 117 ist das Produkt einer unbekannten Zahl, die durch 9 multiplicirt ist, welche ist die unbekannte Zahl? Antwort x.

$$9x = 117$$

$$x = 13$$

77) Man soll vier Zahlen finden, die sich gegen einander verhalten, wie 2, 3, 4, 6, und deren Summe 8 ist.

Man nehme eine von den gegebenen Zahlen als x, als die Einheit an, nach welcher man die andern Zahlen durch die Kettenregel bestimmt. Denn, weil sich nur Dinge von gleicher Art addiren lassen, so müssen alle Posten durch x benahmt seyn.

$$1 - - 2 \qquad 2x$$

$$3 - - x \qquad \text{Fac.} \frac{2x}{3}$$

x	$2 = 1\frac{1}{15}$
$\frac{2}{3}x$	$3 = 1\frac{9}{15}$
$1\frac{1}{3}x$	$4 = 2\frac{2}{15}$
$2x$	$6 = 3\frac{3}{15}$
Summe $5x = 8$	Summe 8
$x = 1\frac{3}{5}$	

Ist der Werth von x gefunden; so findet man die übrigen Zahlen durch die Kettenregel.

78) Wenn ich $3\frac{1}{2}$ mal so viel Geld hätte, als ich habe, so hätte ich so viel über 375 Thlr. als ich habe. Wie viel Thlr. habe ich? Antwort x Thlr.

$$\begin{aligned} \tfrac{7}{2}x &= x + 375 \\ 7x &= 2x + 750 \\ 5x &= 750 \\ x &= 150 \text{ Thlr.} \end{aligned}$$

79) $\frac{1}{3}$ von meinem Gelde und 15 Thlr. ist so viel, als $\frac{4}{5}$ von meinem Gelde weniger 28 Thlr. Wie viel Geld habe ich? Antwort x Thlr.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + 15 &= \frac{4x}{5} - 28 \\ 5x + 225 &= 12x - 420 \\ 5x + 645 &= 12x \\ 645 &= 7x \\ 92\tfrac{1}{7} &= x \end{aligned}$$

80) Man hat einige Pfunde Waare, verkauft man 1 Pfund für $4\frac{7}{8}$ Thlr.; so verliert man auf alle Pfunde $2\frac{1}{2}$ Thlr. Verkauft man 1 Pfund für $5\frac{1}{2}$ Thl. so gewinnt man auf alle Pfunde 10 Thlr. Wie viel Pfunde hat man? Antwort x Pfund.

Man rechne aus, wie viel x Pfund in beyden Fällen kosten, und füge die gegebenen Bedingungen des Gewin-

Gewinnes und Verlustes gehörig hinzu, so ist der Werth aller Pfunde doppelt ausgedrückt.

1 Thlr. — — x Pfund
1 Pfuud — — $4\frac{7}{8}$ Thlr. } Fac. $\frac{39x}{8}$

1 Thlr. — — x Pfund
1 Pfund — — $5\frac{1}{2}$ Thlr. } Fac. $\frac{11x}{2}$

$$\frac{39x}{8} + \frac{5}{2} = \frac{11x}{2} - 10$$

$$156x + 80 = 176x - 320$$

$$400 = 20x$$

$$20 \text{ Pf.} = x$$

81) Zwey Malter Rocken und acht Malter Weizen kosten zusammen 64 Thlr.; drey Malter Rocken und 6 Malter Weizen kosten nach demselben Preise 54 Thlr. Wie viel kostet 1 Malter von jedem? Antwort 1 Malter Rocken kostet x, 1 Malter Weizen y Thlr.

Zwo unbekannte Größen fordern zwo Gleichungen.

$2x + 8y = 64$, $3x + 6y = 54$
$2x = 64 - 8y$, $3x = 54 - 6y$
$x = 32 - 4y$, $x = 18 - 2y$
$32 - 4y = 18 - 2y$
$32 = 18 + 2y$
$14 = 2y$
Thlr. $7 = y$

Setzt man den gefundenen Werth von y statt y in eine der obigen Gleichungen; so giebt die Auflösung, daß $x = 4$ Thlr. sey.

Probe.

2 Malter Rocken a 4 Thlr. = 8 Thlr.
8 Malter Weizen a 7 Thlr. = 56 Thlr.
Summe 64 Thlr.

3 Malter Rocken a 4 Thlr. = 12 Thlr.
6 Malter Weizen a 7 Thlr. = 42 =
Summe 54 Thlr.

82) Man miethet eine Wiese für 20 Thlr.
a) weidet 2 Pferde 8 Wochen = 16 . . x
b) = 5 = 4 = = 20 . . 1 — x/4
c) = 3 = 10 = = 30 . . $1\frac{7}{8}x$
Summe $4\frac{1}{8}x$

Wie viel giebt ein jeder? Antwort 16 giebt x Thlr.

$$4\frac{1}{8}x = 20 \text{ Thlr.}$$
$$\frac{33}{8}x = 20$$
$$33x = 160$$
$$x = 4\frac{28}{33} \text{ Thlr.}$$

Was die übrigen geben findet man durch die Kettenregel.

83) Man theile die Zahl 84 solchergestalt in zwey ungleiche Theile, daß, wenn man den kleinern Theil von dem Größern abzieht, $13\frac{1}{2}$ übrig bleiben. Wie groß ist jeder Theil? Antwort der größere x, der kleinere y.

$x + y = 84$, $x - y = 13\frac{1}{2}$
$x = 84 - y$, $x = \frac{27}{2} + y$
$84 - y = \frac{27}{2} + y$
$168 = 27 + 4y$
$141 = 4y$
$35\frac{1}{4} = y$
$48\frac{3}{4} = x$

84) Doris ward gefragt, wie groß dasjenige Capital sey, welches sie zu 5 Zinse von 100 verliehen habe? Sie antwortete: Wenn du den vierten Theil meines dir unbekannten Capitals, durch die dir unbekannten einjährigen Zinsen dieses Capitals multiplicirest, und zum Produkte 2 Thlr. addirest; so erhältst du die Grösse des Capitals. Wie groß ist das Capital? Antwort x Thlr.

Man rechne die Zinsen von dem Capital x aus, und verfahre wie Doris sagt.

1 Zinse — — x Thlr.
100 Thlr. — — 5 Zinse } Fac. $\frac{x}{20}$

$$\frac{xx}{80} + 2 = x$$
$$xx - 80x = -160$$

Zu der unreinen Gleichung $xx - 80x = -160$ addirt man, wie schon gesagt ist, zu beyden Seiten $\frac{1}{4}$ vom Quadrate von den Coefficienten von x.

$\sqrt{xx - 80x + 1600} = \sqrt{1440}$
$x - 40 = 37\frac{24}{100}$
$x = 77\frac{24}{100}$ Thlr.

85) Doris ward gefragt: wie viel Zinse sie jährlich von einem unbekannten Capitale erhalte, das zu 4 Procent

steht? Sie antwortete: Dividire den fünften Theil des unbekannten Capitals, durch die unbekannten Zinsen eines Jahrs, und addire 9 Thlr. zum Quotienten, so erhältst du die Zinsen des Capitals. Wie viel Zinsen bekömmt Doris jährlich? Antwort x Thlr. Zinse.

Soll der fünfte Theil des Capitals durch die Zinsen dividirt werden; so muß man dieß Capital erst durch die Kettenregel finden, und mit solchem vornehmen, was Doris sagt.

1 Capital — — x Zinsen
4 Zinse — — 100 Capital. Fac. 25x

$$x = \frac{25}{x} + 9$$
$$x = 5 + 9 = 14 \text{ Thlr.}$$

86) Man verkauft von einem Stücke Tuch $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ des Stücks, und behält 20 Ellen übrig. Wie viel Ellen hat das Stück gehalten? Antwort x Ellen.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 20 = x$$
$$7x + 240 = 12x$$
$$240 = 5x$$
$$48 = x$$

87) $\frac{3}{8}$ von dem Preise eines Gartens und 2 Thlr. sind 38 Thlr. Wie viel kostet der Garten? Antwort x Thlr.

$$\frac{3x}{8} + 2 = 38$$
$$3x = 288$$
$$x = 96 \text{ Thlr.}$$

88) Man

88) Man sucht zwo Zahlen, so daß eine derselben siebenmal größer als die andere sey, und wenn die kleinere von der größern subtrahirt wird, der Rest 426 sey; wie groß ist jede Zahl? Antwort eine x, die andere 7x.

$$\begin{aligned} 7x - x &= 426 \\ 6x &= 426 \\ x &= 71, \text{ die andere } 497 \end{aligned}$$

89) Man kauft für 2500 Thlr. etliche Pferde, jedes Pferd kostet viermal so viel Thlr., als der Pferde sind. Wie viel Pferde hat man gekauft? Antwort x Pferde.

Um den Preis von allen Pferden noch einmal durch x auszudrücken, rechne man aus, wie viel x Pferde kosten.

1 Thlr. — — x Pferde
1 Pferd — — 4x Thlr. } Fac. 4xx

$$\begin{aligned} 4xx &= 2500 \\ \sqrt{}\, xx &= \sqrt{}\, 625 \\ x &= 25 \text{ Pferde.} \end{aligned}$$

90) Drey Stück Leinewand sind zusammen 130 Ellen lang, das erste ist zweymal so lang als das andere, man bezahlt für eine Elle des ersten Stücks 5 Gr., des zweyten 6, des dritten 7 Gr., alle drey Stücke kosten $21\frac{1}{9}$ Thlr. Wie viel Ellen hält jedes Stück? Antwort das zweyte $= x$, das erste $= 2x$, das dritte $130 - 3x$ Ellen.

Was sind die $21\frac{1}{9}$ Thlr.? Sie sind die Summe von dem Preise aller Ellen. Den Preis eines jeden Stücks berechnet, und die Summe gemacht, giebt die $21\frac{1}{9}$ Thlr. noch einmal.

1 Gr. — — x Ellen
1 Elle — — 6 Gr. } Fac. 6x

1 Gr. — — 2x Ellen
1 Elle — — 5 Gr. } Fac. 10x

1 Gr. — 130 − 3x Ellen
1 Elle — 7 Gr. } Fac. 910 − 21x

Summe 910 − 5x Gr.

$910 - 5x = 21\frac{1}{9}$ Thlr.
$910 - 5x = 760$ Gr.
$150 - 5x = 0$
$150 = 5x$
$30 = x$

$x = 30$
$2x = 60$
$130 - 3x = 40$
Summe 130

91) Ein Mann ward gefragt, wie viel Ochsen er habe? er antwortete: Wenn ich die Anzahl derselben quadrire, so kommen 32 mehr, als wenn ich diese Anzahl durch 35 multiplicire, und zum Produkte die Anzahl und 800 addire. Wie viel sind der Ochsen? Antw. x.

$$xx = 35x + x + 800 + 32$$
$$xx - 36x = 832$$
$$\sqrt{}\ xx - 36x + 324 = \sqrt{}\ 1156$$
$$x - 18 = 34$$
$$x = 52 \text{ Ochsen}$$

92) Wenn ich $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{8}$ meiner Thaler durch einander multiplicire, und vom Produkte meine Thaler zweymal subtrahire, so bleiben 480 übrig. Wie viel Thlr. habe ich? Antw. x Thlr.

$$\frac{1}{6}xx - 2x = 480$$
$$xx - 12x = 2880$$
$$\sqrt{}\ xx - 12x + 36 = \sqrt{}\ 2916$$
$$x - 6 = 54$$
$$x = 60 \text{ Thlr.}$$

93) Man

93) Man suche eine Zahl, die, wenn man sie durch 600 multiplicirt, und das Produkt durch 20 dividirt, zum Quotienten 3 giebt. Die Zahl ist x.

$$\frac{600x}{20} = 3$$
$$60x = 6$$
$$x = \frac{1}{10}$$

94) Ein Capital ist auf 5 Zinse von hundert verliehen, nach 6 Jahren erhält man 2000 Thlr., welche das Capital mit den sechsjährigen Zinsen sind. Wie groß ist das Capital? Antw x Thlr.

Man rechne aus, wie viel Zinsen das Capital x in 6 Jahren bringt, und subtrahire diese Zinsen von 2000, so ist der Rest dem Capitale x gleich. Oder man addire die gefundenen Zinsen zum Capitale x, die Summe ist den 2000 Thlrn. gleich.

1 Zinse — — { x Thlr. / 6 Jahren

100 Thlr. / 1 Jahr } — — 5 Zinse Fac. $\frac{3x}{10}$

$$x + \frac{3x}{10} = 2000$$
$$10x + 3x = 20000$$
$$13x = 20000$$
$$x = 1538\frac{6}{13}$$

95) Man sucht ein Capital, welches, wenn es zu 4 Procent belegt wird, in 30 Jahren mit den dreyßigjährigen Zinsen 500 Thlr. macht; wie groß ist dieß Capital? Antw. x Thlr.

Man

Man suche die Zinsen von x Thlrn. in 30 Jahren, zu diesen gefundenen Zinsen addire man das Cap. x, und setze die Summe den 500 Thlrn. gleich.

1 Zinse — — { x Thlr. / 30 Jahr

100 Thlr. / 1 Jahr } — — 4 Zinse Fac. $\frac{12x}{10}$

$$\frac{12x}{10} + x = 500$$

$$13x = 5000$$

$$x = 384\frac{8}{13} \text{ Thlr.}$$

96) Ein Hamburger Kaufmann biethet eine Sorte Zucker, 10 Pfund für $3\frac{3}{4}$ Mark, oder $34\frac{2}{3}$ Pfund für 1 Louisd'or an; wie viel Mark macht 1 Louisd'or? Antwort x Mark.

Weil x Mark einem Louisd'or gleich ist, so rechne man aus, wie viele Pfunde man für x Mark erhalte, wenn 10 Pfund $3\frac{3}{4}$ Mark kosten. In dem Facitte erhält man den zweyten Ausdruck von $34\frac{2}{3}$ Pfund.

1 Pfund — — x Mark
$3\frac{3}{4}$ Mark — — 10 Pfund Fac. $\frac{40x}{15}$ Pfund

$$\frac{40x}{15} = 34\frac{2}{3}$$

Die Auflösung zeigt, daß x gleich 13 Mark sey.

97) Drey Söhne sind die Erben eines Vaters, der erste bekömmt 1000 Thlr. weniger als die Hälfte der ganzen Verlassenschaft, der zweyte 800 Thlr. weniger als der dritte Theil der Verlassenschaft, der dritte 600 Thlr. weniger als der vierte Theil. Wie viel

ist

ist das ganze Vermögen? wie viel bekömmt ein jeder? Das ganze Vermögen ist x Thlr.

$$\frac{x}{2} - 1000 + \frac{x}{3} - 800 + \frac{x}{4} - 600 = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 2400$$

$$\frac{x}{12} = 2400$$

$$x = 28800 \text{ Thlr.}$$

Hieraus findet man nun leicht, daß der erste 13400, der zweyte 8800, der dritte 6600 Thlr. erhalten.

98) Man suche eine Zahl, die, wenn man zu ihr ihre Hälfte addirt, die Summe so viel über 60 sey, als die Zahl selbst unter 65 ist.

$$x + \frac{x}{2} - 60 = 65 - x$$

$$x = 50$$

99) Man zerschneide 32 also in zwey Theile, daß, wenn der kleinere durch 6, der größere durch 5 dividirt wird, die Summe ihrer Quotienten 6 sey; die kleinere sey x, so ist die größere 32 — x.

$$\frac{x}{6} + \frac{32-x}{5} = 6. \quad \text{F. die kl. 12, die gr. 20.}$$

$$x = 12$$

100) Man zerschneide 25 in zwey Theile, so, daß der Größere 49 mal größer, als der Kleinere sey. Es sey kl. x, gr. 25 − x.

$49x = 25 - x$ kleinern $\frac{1}{2}$
$50x = 25$ größern $24\frac{1}{2}$
$x = \frac{1}{2}$

101) Man hat eine gewisse Anzahl Ellen gekauft, für jede 5 Ellen hat man gegeben 7 Thlr., man hat von diesen Ellen wieder verkauft 7 Ellen für 11 Thlr., und bey dem Handel gewonnen 100 Thlr.; wie viel Ellen sind da gewesen? Antwort x Ellen.

Berechnet man durch die Kettenregel, wie viel für x Ellen ausgegeben, und wie viel für x Ellen wieder gelöset worden, und addirt zum ausgelegten Gelde den Gewinn; so muß die Summe dem gelöseten Gelde gleich seyn.

$$\frac{7x}{5} + 100 = \frac{11x}{7}$$

Die Auflösung zeigt, daß $x = 583\frac{1}{3}$ Elle sey.

102) Ein Wechsler hat zweyerley Münzen, von der einen giebt er 10 Stück um 1 Thlr., von der andern 20 Stück für 1 Thlr.; man verlangt 17 Stück für 1 Thlr., wie viel Stück erhält man von jeder Sorte? Antwort von der einen x, von der andern $17 - x$.

1 — — x Stück Fac. $\frac{x}{10}$
10 St. — — 1 Thlr.

1 — — $17 - x$ St. Fac. $\frac{17-x}{20}$
20 St. — — 1 Thlr.

$$\frac{17-x}{20} + \frac{x}{10} = 1$$

Die Auflösung zeigt, daß man von der einen Sorte 3, von der andern 14 Stück erhalte.

103) Wie

103) Wie werden die Gleichungen aufgelöset, in denen sich die unbekannte Größe nur in einer Potenz in verschiedenen Gliedern zeigt?

Man bringe alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, allein auf eine Seite. Dividire diese Seite durch die Potenz der unbekannten Größe, und multiplicire sie wieder damit. Nun kann man durch den Factor der bekannten Glieder die andere Hälfte dividiren. Z. E.

$$axxx = bxxx + 200$$
$$axxx - bxxx = 200$$
$$(a-b)xxx = 200$$
$$xxx = \frac{200}{a-b}$$

$$axx + cxx = bxx + d$$
$$axx + cxx - bxx = d$$
$$(a+c-b)xx = d$$
$$xx = \frac{d}{a+c-b}$$

$$ax + abx = aa - x - c$$
$$ax + abx + x = aa - c$$
$$(a+ab+1)x = aa - c$$
$$x = \frac{aa-c}{a+ab+1}$$

Sind die bekannten Größen durch Zahlen ausgedrückt, so sieht man die gleichen Potenzen als Größen von gleicher Art an, welche man durch Addiren und Subtrahiren in eine Größe sammlen kann.

104) Man kauft ein Pferd für etliche Thaler, verkauft dasselbe für 119 Thlr., gewinnt an 100 so viele Thlr., als das Pferd gekostet, wie theuer ist es eingekauft? Antwort für x Thlr.

Man rechne aus, wie viel an x Thlr. gewonnen, addire zu diesem Gewinne den Werth des Pferdes. Die Summe ist dem gelöseten Gelde gleich.

1 Thlr. — — x xx
100 — — x Fac. ——
100

$$\frac{xx}{100} + x = 119$$

$$xx + 100x = 11900$$

Zu dieser unreinen Gleichung, um sie rational zu machen, $\frac{1}{4}aa$, oder $\frac{100.100}{4}$ zu beyden Seiten addirt

$$\sqrt{xx + 100x + 2500} = \sqrt{14400}$$

$$x + 50 = 120$$

$$x = 70 \text{ Thlr.}$$

105) Eine Krämerin hat drey Ellen Leinwand mehr, als die andere. Beyde lösen zusammen 35 Thlr. Die eine spricht: aus deinem Zeuge hätte ich 24 Thlr. gelöset, die andere spricht: aus deinem Zeuge hätte ich $12\frac{1}{2}$ Thlr. gelöset. Wieviel Ellen hat jede gehabt? Antwort eine x, die andere x + 3 Ellen

1 Thlr. — — x Ellen $\frac{24x}{x+3}$
x+3 Ellen — — 24 Thlr. Fac. ——

1 Thlr. — — x+3 Ellen $\frac{25x+75}{2x}$
x Ellen — — $12\frac{1}{2}$ Thlr. Fac. ——

$$\frac{24x}{x+3} + \frac{25x+75}{2x} = 35$$

$$48xx + 25xx + 150x + 225 = 70xx + 210x$$

$$3xx - 60x = -225$$

$$xx - 20x = -75$$

$$\sqrt{xx - 20x + 100} = \sqrt{25}$$

$$x - 10 = 5$$

$$x = 15 \text{ Ellen, die andere 18 Ellen.}$$

106) Man

106) Man suche eine Zahl, wenn sie durch 2 multiplicirt, vom Produkte 1 subtrahirt, der Rest durch 4 dividirt wird; daß eins weniger heraus komme, als die gesuchte Zahl ist; welche x sey.

$$2x - 1$$
$$4x - 2 - 2 \text{ oder}$$
$$\frac{4x - 4}{4} = x - 1$$
$$x - 1 = x - 1$$

Die Auflösung zeigt, daß dieß eine identische Gleichung sey; das ist, daß man für x eine jede beliebige Zahl annehmen könne.

Noch eine Aufgabe von dieser Art:

107) Eine unbekannte Zahl durch den dritten Theil dieser Zahl dividirt, giebt den Quotienten 3; wie groß ist die Zahl? Sie sey = x.

$$x : \frac{x}{3} = 3$$
$$x = \frac{3x}{3}$$
$$x = x$$

Die Auflösung zeigt, daß dieß eine identische Gleichung sey. Man könne nämlich für x eine jede beliebige Zahl annehmen, der Quotient wird immer 3 seyn, wenn man eine jede Zahl durch den dritten Theil derselben dividirt. Ueberhaupt steckt ein bestimmter Theil von einer Zahl so oft in der Zahl, als derselbe Theil von einer jeden andern Zahl, in dieser steckt. Eine unbekannte Zahl durch einen Theil derselben dividirt, giebt daher immer eine identische Gleichung, und eine jede Zahl ist die richtige Beantwortung derselben.

II. Abschnitt.

Aufgaben zur arithmetischen Progression.

§. 124.

Wenn man eine beliebige arithmetische Progression vor und rückwärts unter einander schreibt, die über einander stehenden Glieder addirt; so giebt dieß eine Regel, wie man die Summe aller Glieder einer jeden arithmetischen Progression finden könne.

$$\begin{array}{r} 1 - 3 - 5 - 7 - 9 \\ 9 - 7 - 5 - 3 - 1 \\ \hline 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 - 6 - 9 - 12 \\ 12 - 9 - 6 - 3 \\ \hline 15 + 15 + 15 + 15 = 60 \end{array}$$

Man sieht, daß, wenn man das erste Glied einer arithmetischen Progression zum letzten Gliede addirt; diese Summe durch die Zahl der Glieder multiplicirt; daß alsdenn doppelt so viel komme, als die Summe der Progression beträgt; weil man die Summe von zwo gleichen Progressionen erhält.

Die Summe einer arithmetischen Progression findet man daher: wenn das erste Glied zum letzten addirt, diese Summe durch die Zahl der Glieder multiplicirt; und das Produkt halbirt wird. Die Summe des ersten und letzten Gliedes in obiger Progression ist 10 durch die Anzahl der Glieder multiplicirt giebt 50, hiervon die Hälfte ist 25 als die Summe der Progression.

108) Man soll die Zahl 48 solchergestalt in 9 Theile zerschneiden, daß ein Theil immer $\frac{1}{2}$ größer, als der nächst vorherstehende sey. Weil der Name der

Verhält-

Verhältniß $\frac{1}{2}$ gegeben ist, so könnte man die Progression machen, wenn man das erste Glied wüßte. Dieses sey demnach $= x$, die Progression ist daher x — $x+\frac{1}{2}$ — $x+1$ — $x+1\frac{1}{2}$ — $x+2$ — $x+2\frac{1}{2}$ — $x+3$ — $x+3\frac{1}{2}$ — $x+4$. Das neunte Glied zum ersten addirt, giebt $2x+4$, dieses durch 9 multiplicirt ist $18x+36$; hiervon die Hälfte ist $9x+18$. Diese Summe soll nach der Aufgabe gleich seyn 48, man setze also

$$9x + 18 = 48$$
$$9x = 30$$
$$x = 3\frac{1}{3}$$

Es sind also die gesuchten Theile

$$3\frac{1}{3}+3\frac{5}{6}+4\frac{2}{6}+4\frac{5}{6}+5\frac{2}{6}+5\frac{5}{6}+6\frac{2}{6}+6\frac{5}{6}+7\frac{2}{6} = 48$$

Die Summe dieser Progression findet man durch die eben gezeigte Methode, wenn man die Probe machen will.

Weil man aber, um die Summe einer arithmetischen Progression zu finden, nur das erste und letzte Glied, nebst den Namen der Verhältniß zu wissen braucht; so kann man der Mittelglieder zu diesem Endzwecke entbehren.

Wenn eine arithmetische Progression durch Buchstaben ausgedrückt wird, so zeigt das letzte Glied, wie es entstanden sey, und sagt daher, wie man verfahren müsse, daß man das letzte Glied, da das erste Glied, der Name der Verhältniß, und die Anzahl der Glieder gegeben ist, ohne die Mittelglieder zu machen, finden könne, welches die Arbeit, wenn der Glieder viel sind, sehr vermindert. Es sey a das erste Glied, b sey der Name der Verhältniß, so ist der Ausdruck einer jeden Progression

$$a — a + b — a + 2b — a + 3b \text{ u. s. w.}$$

Das letzte Glied sagt: man solle zum ersten Gliede a den Namen der Verhältniß b so oft, als der Glieder weniger eins sind addiren. Weil diese Progression aus

vier Gliedern besteht, so addirt man zu a den Namen der Verhältniß dreymal. Z. E.

Eine Progression bestehe aus 21 Gliedern; das erste Glied sey 2, der Name der Verhältnis 4, was wird das letzte Glied seyn? viermal 20 ist 80, und 2 ist 82, welches das 21ste Glied ist.

109) Ein Mann ist 513 Thlr. schuldig, er will diese Schuld in 11 Jahren dergestalt abtragen, daß er jedes Jahr 3 Thlr. mehr, als das nächst vorhergehende Jahr bezahlt. Wie viel giebt er auf jeden Termin?

Weil der Mann jährlich 3 Thlr. mehr giebt, so sind diese drey Thlr. der Name der Verhältniß einer arithmetischen Progression, die aus 11 Gliedern bestehet, deren Summe 513 ist. Um diese Summe noch einmal durch x ausgedrückt zu erhalten, muß man das erste und letzte Glied wissen. Das erste Glied sey x, so ist das letzte Glied $x+30$. Diese Summe durch 11 multiplicirt, und das Produkt durch 2 dividirt, giebt die Summe $11x+165$; diese Summe ist der Summe 513 gleich.

$$11x + 165 = 513$$
$$11x = 348$$
$$x = 31\tfrac{7}{11}$$

Er bezahlt also
$31\frac{7}{11} — 34\frac{7}{11} — 37\frac{7}{11} — 40\frac{7}{11} — 43\frac{7}{11} — 46\frac{7}{11} — 49\frac{7}{11} — 52\frac{7}{11} — 55\frac{7}{11} — 58\frac{7}{11} — 61\frac{7}{11}$. Die Summe dieser 11 Jahre beträgt 513 Thlr.

110) Ein Kauffmann steckt, ich weis nicht wie viele Thlr. in den Handel; jedes Jahr gewinnt er so viel, als er angelegt hat, nach 9 Jahren hat er mit dem angelegten 2000 Thlr.; wie viel hat der Mann angelegt? Antwort x Thlr.

Das

Das erste Glied dieser arithmetischen Progression ist x, das letzte 9x, die Summe derselben 45x; daher

$$45x = 2000$$
$$x = 44\frac{4}{9} \text{ Thlr.}$$

III. Abschnitt.

Aufgaben zur geometrischen Progression.

§. 125.

Wenn eine Zahl durch eine andere Zahl multiplicirt, das Produkt wieder durch dieselbe Zahl multiplicirt, und diese Multiplication also weiter fortgesetzt wird; so erwächst eine zunehmende geometrische Progression. Die Produkte sind die Glieder der Progression, der Multiplicator der Glieder, ist der Name der Verhältniß. Z. E.

Das erste Glied sey 3, der Name 2, so ist die Progression 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 u. s. w.

Werden alle Glieder durch den Namen dividirt; so entsteht eine abnehmende Progression. Z. E.

Das erste Glied sey 99, der Name 3, so ist die Progression $99 : 33 : 11 : 3\frac{2}{3} : \frac{11}{9} : \frac{11}{27} : \frac{11}{81}$ u. s. w.

Ist der Name der Verhältniß ein Bruch, so entsteht das Gegentheil. Die Multiplication der Glieder durch den Bruch, giebt eine abnehmende, die Division eine zunehmende Progression. Z. E.

Der Name sey $\frac{2}{3}$, das erste Glied sey 2, die erste der folgenden Reihen ist durch Multipliciren, die andere durch Dividiren entstanden.

$$2 : 1\frac{1}{3} : \frac{8}{9} : \frac{16}{27} : \frac{32}{81}$$
$$2 : 3 : 4\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4} : 10\frac{1}{8}$$

III) Ein gefordertes Glied einer geometrischen Progression zu finden, wenn das erste Glied und der Name gegeben ist.

Man mache einige Glieder der Progression, schreibe die Ziffern in ihrer natürlichen Ordnung darüber, so

daß 0 über 1 komme. Die Zahlen der obersten arithmetischen Reihe heißen die Logarithmen der untersten geometrischen Reihe. Der Logarithmus von 1 ist 0.

0 1 2 3 4 5 6
1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64

Nun setze man die Logarithmen so zusammen, daß die Summe derselben dem Logarithmen gleich sey, welcher das geforderte Glied bezeichnet. Z. E. wollte man das 14te Glied haben, so müßte die Summe der Logarithmen 13 seyn, weil in obiger Progression der Logarithmen 13 das 14te Glied bezeichnet; die Summe müßte 9 seyn, wenn das 10te Glied gefordert wäre. Nun multiplicire man die Glieder der geometrischen Reihe, welche unter den addirten Logarithmen stehen, durch einander, das Produkt ist das gesuchte Glied. Z. E. man soll das 13te Glied einer geometrischen Progression finden, dessen erstes Glied 1, der Name 2 ist.

0 1 2 3 4
1 : 2 : 4 : 8 : 16 $4 + 4 + 4 = 12$ Summe
$16 \cdot 16 \cdot 16 = 4096$ Prod.

oder

$4 + 3 + 2 + 3 = 12$ Summe
$16 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 8 = 4096$

Wenn das erste Glied der Progression nicht Eins ist, so trift die Zahl des Logarithmus mit der Zahl des Gliedes überein.

Man soll das zehnte Glied einer geometrischen Reihe finden deren erstes Glied 3, der Name 3 ist.

1 2 3
3 : 9 : 27 $3 + 3 + 3 + 1 = 10$
$27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 3 = 59049$

Es ist aber zu merken, daß dieß Verfahren nur alsdann anzuwenden ist, wenn der Name, ein Glied der Progression, wie in den beyden gegebenen Fällen, ausmacht.

ausmacht. Ist dieses nicht, so ist es am bequemsten eine wiederholte Multiplication, durch den Namen so lange fortzusetzen, bis man das gesuchte Glied erreicht. Die Vortheile, das letzte Glied ohne diese wiederholte Multiplication zu finden, sind nicht erheblich.

Weit beträchtlicher ist der Vortheil, die Summe einer geometrischen Progression zu finden, wenn das letzte und erste Glied, und der Name gegeben ist. Denn man ist nicht allein einer oft weitläuftigen Addition überhoben, die um desto beschwerlicher wird, wenn die Progression aus Brüchen besteht, sondern man kann auch alle Mittelglieder entbehren. Ausserdem finden sich oft, wie die Folge zeigen wird, solche Progressionen, bey denen es unmöglich ist, die Summe der Glieder, durch eine ordentliche Addition zu finden.

112) **Die Summe einer jeden geometrischen Progression, sie sey ab- oder zunehmend zu finden, wenn das erste und letzte Glied, auch der Name gegeben ist.**

Wie sich die Differenz des ersten und zweyten Gliedes zum zweyten Gliede verhält; so verhält sich die Differenz des ersten und letzten Gliedes zur Summe der ganzen Progression, weniger das erste Glied.

Sind also diese Stücke bekannt, so suche man das zweyte Glied. Nun ist das erste, zweyte und letzte Glied der Progression bekannt; aus diesen Gliedern läßt sich die Summe also finden. Man finde durch Subtrahiren die Differenz zwischen dem ersten und zweyten Gliede, und die Differenz zwischen dem ersten und letzten Gliede; suche durch die Kettenregel die vierte Proportionalzahl, und addire zum Facitte das erste Glied. Z. E.

Das erste Glied einer zunehmenden geometrischen Progression sey 1, das letzte Glied sey 243, der Name

sey 3, so ist das zweyte Glied 3; die Differenz des ersten und zweyten Gliedes ist 2, die Differenz des ersten und letzten Gliedes 242; also

1 — — 242
2 — — 3 Fac. 363.

Hierzu das erste Glied 1 addirt, giebt die Summe der Progression 364.

Das erste Glied einer abnehmenden Progression sey 100, das letzte Glied $3\frac{1}{8}$, der Name sey 2; so ist die Progression

$$100 + 50 + 25 + 12\frac{1}{2} + 6\frac{1}{4} + 3\frac{1}{8}$$

Die Differenz des ersten und zweyten Gliedes ist 50, des ersten und letzten Gliedes $96\frac{7}{8}$. Nun sagt man: wie viel giebt $96\frac{7}{8}$, wenn die Differenz 50, das zweyte Glied 50 giebt; oder

1 — — $96\frac{7}{8}$
50 — — 50 Fac. $96\frac{7}{8}$

Hierzu das erste Glied 100 addirt, giebt die Summe der ganzen Progression $196\frac{7}{8}$.

113) Es soll die Zahl 2186 in sieben Theile solchergestalt getheilt werden, daß jeder Theil dreymal so groß, als der nächst vorhergehende sey; wie groß ist jeder Theil?

Oder mit andern Worten: man soll eine geometrische Progression von sieben Gliedern machen, deren Summe 2186, der Name 3 sey. Wüßte man das erste Glied, so ließe sich die Progression durch eine wiederholte Multiplication, durch den Namen 3 machen. Man nehme es daher x an, so hat man

$$x + 3x + 9x + 27x + 81x + 243x + 729x$$

Um nun die Summe nach der gezeigten Methode zu erhalten, ist die Differenz des ersten und zweyten Gliedes 2x, des ersten und letzten Gliedes 728x, also:

1	—	—	728x	
2x	—	—	3x	Fac. 1092x

Hierzu 1 addirt ist die Summe 1093x. Diese Summe soll gleich der Summe 2186 seyn, daher setze man sie gleich.

$$1093x = 2186$$
$$x = 2$$

Da nun das erste Glied bekannt ist, läßt sich die Progression nach der Aufgabe machen. Die Glieder derselben sind die gesuchten Theile.

2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458. S. 2186

114) Fünf Personen sollen sich dergestalt in 100 Thlr. theilen, daß immer einer noch einmal so viel, als der nächst Vorhergehende bekömmt. Wie viel erhält eine jede Person? das ist, man soll eine geometrische Progression von 5 Gliedern machen, deren Name 2, und deren Summe 100 ist. Die Glieder dieser Progression sind die gesuchten Theile; das erste Glied sey x, so ist die Progression

$x + 2x + 4x + 8x + 16x = 31x$, dieß soll gleich 100 seyn; also

$$31x = 100$$
$$x = \tfrac{100}{31},$$ die Progression ist

Thlr. $\tfrac{100}{31} : \tfrac{200}{31} : \tfrac{400}{31} : \tfrac{800}{31} : \tfrac{1600}{31}$
oder $3\tfrac{7}{31} : 6\tfrac{14}{31} : 12\tfrac{28}{31} : 25\tfrac{25}{31} : 51\tfrac{19}{31}$ Thlr. S. 100 Thl.

115) Man will ein Capital von 300 Thlrn. in vier Terminen bezahlen, in jedem Termine will man $\tfrac{2}{3}$ des letzten Termins entrichten. Wie viel wird jedesmal bezahlt? Antwort den ersten Termin x Thlr. Die Progression ist:

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{4x}{9} + \frac{8x}{27}. \quad \text{Summe } \frac{65x}{27}$$

$$\frac{65x}{27} = 300$$

$$x = \frac{1620}{13}$$

Dieß erste Glied und die folgenden Produkte durch den Namen $\frac{2}{3}$ multiplicirt, giebt die Progression und die gesuchten Theile.

$$\frac{1620}{13} : \frac{3240}{39} : \frac{6480}{117} : \frac{12960}{351}$$

oder $124\frac{8}{13} : 83\frac{1}{13} : 55\frac{5}{13} : 36\frac{12}{13}$ Thlr. S. 300

116) Man will einen Brunnen, der 7 Ruthen tief seyn soll, graben lassen. Weil nun mit der zunehmenden Tiefe auch die Arbeit und die Gefahr zunimmt; so soll die erste Ruthe mit 4 Thlrn., die zweyte $\frac{1}{4}$ höher als die erste, die dritte $\frac{1}{4}$ höher als die zweyte u. s. w. bezahlt werden. Wie viel wird jede Ruthe kosten? das ist: man soll eine geometrische Progression von 7 Gliedern machen, deren erstes Glied 4 der Name $\frac{1}{4}$ sey.

Thlr. $4 : 5 : 6\frac{1}{4} : 7\frac{13}{16} : 9\frac{49}{64} : 12\frac{53}{256} : 15\frac{265}{1024}$

Der unendlichen geometrischen Progressionen, muß ich, weil sie viel besonders zeigen, nothwendig erwähnen.

117) Ein Mann der 4 Thlr. schuldig ist, will jeden Tag etwas abzahlen, und zwar solchermaaßen, den ersten Tag will er $\frac{1}{3}$ vom Capitale 4, den zweyten $\frac{1}{3}$ vom Reste der Schuld, den dritten $\frac{1}{3}$ von diesem Reste bezahlen; mit dieser Bezahlung will er so lange fortfahren, bis die ganze Schuld bezahlt ist. Nach wie viel Tagen wird die Schuld getilgt seyn?

Diese

Diese Frage zu beantworten, muß eine geometrische Progression gemacht werden, deren erstes Glied das Capital 4 ist. Der Name der Verhältniß ist nicht $\frac{1}{3}$, sondern $\frac{2}{3}$, denn wenn $\frac{1}{3}$ bezahlt wird; so bleibt ein Rest von $\frac{2}{3}$ übrig. Da nun die Glieder der Progression diesen Rest anzeigen sollen, so muß der Name $\frac{2}{3}$ seyn. Er muß der Rest seyn, wenn $\frac{1}{3}$ von $\frac{3}{3}$ subtrahirt wird. Wäre die Bezahlung $\frac{3}{5}$, so wäre der Name $\frac{2}{5}$. Wählte man nach der Aufgabe $\frac{1}{3}$ zum Namen, so würde man in den Gliedern der Progression finden, wie viel täglich bezahlt würde, wenn jeden Tag $\frac{1}{3}$ von der Bezahlung des gestrigen Tages zu entrichten wäre. Dieß aber fordert die Aufgabe nicht. Die ganze Schuld würde bezahlt seyn, wenn kein Rest mehr übrig wäre, wenn in der Progression ein Glied erfolgte, welches 0 enthielte.

Die Progression ist:

$$4 : \tfrac{8}{3} : \tfrac{16}{9} : \tfrac{32}{27} : \tfrac{64}{81} \text{ u. s. w.}$$

oder 4 Thl. : $2\frac{2}{3}$ Thl. : $1\frac{7}{9}$ Thl. : $1\frac{5}{27}$ Thl. : $28\frac{4}{9}$ Gr.

Man sieht leicht, daß man nie ein Glied, welches 0 ist, erhalten werde, wenn auch die Rechnung noch so weit fortgesetzt würde. Die Schuld wird täglich kleiner, ganz getilgt aber wird sie nie; man nähert sich täglich einem kurzen Ziele, ohne das Ziel jemals zu erreichen.

118) Die Summe einer unendlichen geometrischen Progression zu finden.

Ob man gleich das letzte Glied hier nie erreichen kann, weil die Progression ohne Ende fortläuft, so kann man doch die Summe einer solchen unendlichen Reihe richtig finden. Dieß ist der gesagte Fall, wo die ordentliche Addition der Glieder deswegen nicht anzuwenden ist, weil man von der unendlichen Reihe nur ein Paar Glieder hat, und doch die Summe aller unendli-

endlichen Glieder wissen will. Man stelle sich vor, es werde die Progression durch viele tausend Glieder fortgesetzt, so wird das letzte Glied so klein werden, daß es für nichts zu achten ist, es wird o seyn. Der Creditor obiger Forderung würde die Bezahlung für völlig annehmen, wenn gleich noch der millionste Theil eines Pfennigs daran fehlte. Es ist also das letzte Glied einer jeden unendlichen Progression = o. Nun finde man die Summe nach der gegebenen Regel.

Wenn der Name ein Bruch ist; so wird die Progression immer abnehmend und unendlich, wenn nicht die Aufgabe ein gewisses Ziel bestimmt. Bestimmt sie kein früheres Ziel, so ist das letzte Glied immer Null.

Man gebraucht also nur die beyden ersten Glieder einer unendlichen Progression zu haben, um die ganze Summe finden zu können, weil das letzte Glied immer o ist.

119) Das erste Glied einer geometrischen Progression sey 63, der Name $\frac{5}{7}$; wie viel ist die Summe der ganzen unendlichen Progression?

63 : 45 . . . . o

Der Unterschied des ersten und letzten Gliedes ist 63, der Unterschied des ersten und zweyten Gliedes ist 18, also nach obiger Regel

1 — — 63
18 — — 45 Fac. $157\frac{1}{2}$

Hierzu das erste Glied 63 addirt, giebt die Summe $220\frac{1}{2}$.

120) Zeno gebrauchte, um die Möglichkeit der Bewegung zu bestreiten, folgenden Fall: Achilles, sagte Zeno, verfolgte eine Schildkröte, die eine Meile von ihm entfernt war; er durchläuft in einer Stunde zwo, sie in einer Stunde eine Meile. In welcher Meile wird Achill die Kröte einholen? Zeno sagt: der Verfol-

Verfolger wird seine Beute, ob er sie gleich mit doppelter Geschwindigkeit verfolgt, nie erreichen; sondern ewig hinter ihr herlauffen. Denn in der Zeit in welcher Achill eine Meile zurück legt, ist die Schildkröte eine halbe Meile gelauffen, und so viel beträgt jetzt ihre Entfernung von einander; indem Achill den Punkt erreicht, wo die Kröte war, ist sie $\frac{1}{4}$ Meile voraus; er durchläuft diese Viertelmeile, und sie ist ihm um $\frac{1}{8}$ Meile entwischt; die Zeit seiner Bewegung von $\frac{1}{8}$ Meile verstattet ihr einen Vorsprung von $\frac{1}{16}$ Meilen; er durchläuft diese, und sie bleibt $\frac{1}{32}$ Meilen vor ihm, u. s. w. Man sieht leicht, daß er sie nie einholen kann, weil seine Entfernung von ihr nie o wird.

Die Progression, deren Glieder die Entfernungen sind, in welcher sie sich von Zeit zu Zeit von einander befinden, ist:

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64} : \frac{1}{128} \text{ u. s. w.}$$

Weil wir aber aus Erfahrungen und Vernunftschlüssen wissen, daß Achill die Schildkröte wirklich einholt, und die Summe der unendlichen Progression, die Anzahl von Meilen ist, nach welcher dieses geschieht; so findet man den Ort, wo er sie wirklich erreicht hat, in der Summe obiger unendlichen Progression, welche 2 ist; nach zwoen Meilen ist die Beute erreicht.

Wenn der Einwurf des Zeno in der Erfahrung so richtig wäre, als er in der Theorie, und in einer fortgesetzten Rechnung richtig ist; so würde sich ein fliehender Feind für den Kanonenkugeln, die ihn verfolgen, nicht zu fürchten haben, weil sie ihn nie einholen könnten.

121) Ein Besitzer von 500 Thlrn. will das erste Jahr $\frac{3}{4}$ vom Capitale, und jedes der folgenden Jahre $\frac{3}{4}$ so viel verzehren, als er das nächst vorhergehende

Jahr

Jahr verzehrt hat. Wie lange wird vom Capitale noch etwas da seyn? und wie viel wird er jedes Jahr verzehren?

Nimmt man zum ersten Gliede das Capital, zum Namen $\frac{3}{4}$; so erhält man eine Progression, welche beyde Fragen beantwortet.

Multipliciren heißt: eine Größe so oft, oder wenn der Multiplicator ein Bruch ist, einen solchen Theil nehmen, als der Multiplicator sagt.

Da nun immer $\frac{3}{4}$ von dem Aufwande des vorigen Jahres verzehret wird, und das Verzehrte die Glieder der Progression ausmachen soll, so muß $\frac{3}{4}$ der Name seyn, durch welchen multiplicirt wird. Dieß ist nun keine unendliche Progression; denn das erste Jahr wird verzehrt 375 Thlr., das zweyte Jahr sollte verzehrt werden $281\frac{1}{4}$ Thlr.; es sind aber nur noch 125 Thlr. vom ersten Jahre übrig.

Diese Aufgabe erfordert eine unendliche Progression, wenn sie also verändert wird:

122) Ein Besitzer von 500 Thlrn. will das erste Jahr $\frac{3}{4}$ vom Capitale, die folgenden Jahre immer $\frac{3}{4}$ von den noch übrigen Resten verzehren; wie viel ist nach jedem Jahre der Rest? und wenn wird das Capital erschöpft seyn? Es wird nie erschöpft.

Weil hier die Glieder einer geometrischen Progression, deren erstes Glied 500 ist, den jährlichen Rest vom Capitale anzeigen sollen; so muß der Name ebenfalls der Rest seyn, wenn $\frac{3}{4}$ von 1, oder von $\frac{4}{4}$ subtrahirt wird, er muß $\frac{1}{4}$ seyn. Nun geben die Glieder der Progression die Reste nach jedem Jahre. Das Capital wird zwar immer kleiner, allein nie ganz verzehrt.

$500 : \frac{500}{4} : \frac{500}{16} : \frac{500}{64} : \frac{500}{256} : \frac{500}{1024} : \frac{500}{4096}$ u. s. w.

Nach

Nach dem 6ten Jahre ist vom Capitale nur noch ein Rest von $\frac{125}{1924}$ Thlrn., oder von 2 Gr. 3 Pfennigen. Die Summe sagt hier nichts.

§. 126.

Wenn zween Körper sich nach einer Richtung mit verschiedener Geschwindigkeit bewegen, das ist: wenn der Geschwindere den Langsamern einholen will, und man soll den Ort finden, wo sie sich einholen; so sind die Glieder der geometrischen Progression die Entfernungen, in welcher sie sich von Zeit zu Zeit von einander befinden. Das erste Glied ist die erste Entfernung, folglich das letzte Glied, wo sie sich erreichen, ist: wenn sich gar keine Entfernung zwischen ihnen befindet, wenn die Entfernung Null ist; die Summe der Progression ist der Ort wo sie sich erreichen; der Name der Verhältnis ist der Quotient, wenn man die Geschwindigkeit des langsamern durch die Geschwindigkeit des schnellern dividirt. Z. E. der Langsamere bewegte sich in einer Stunde 3 Meilen, der Geschwindere in einer Stunde 7 Meilen, so wäre der Name $\frac{3}{7}$. Ein Körper sey neunmal so schnell als der andere, so ist der Name $\frac{1}{9}$; denn es mögen die Räume, welche zween Körper in gleicher Zeit zurück legen, 2 und 3 seyn. Nimmt man die Geschwindigkeit des Langsamern als Eins an, so ist die Geschwindigkeit des Schnellern $\frac{3}{2}$; nimmt man die Geschwindigkeit des Schnellern als Eins an, so ist die Geschwindigkeit des Langsamern $\frac{1}{3}$. Man siehet leicht, daß man den letzten Ausdruck zum Namen der Verhältniß wählen müsse, weil die Entfernung der Körper von einander immer geringer werden soll.

123) Ein Kriegsschiff verfolgt ein Raubschiff, der Kaper segelt in einer Stunde 2 Meilen, das Kriegsschiff in einer Stunde 3 Meilen, sie sind 2 Meilen von einander, in welcher Meile wird der Kaper eingeholt?

Der

Der Name ist $\frac{2}{3}$, die Entfernung 2 ist das erste Glied, die Summe der unendlichen Progression, deren letztes Glied o ist, ist der ganze Raum, welchen das Kriegsschiff zurück legt, ehe es den Kaper erreicht.

Die Progression ist:

$$2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \frac{32}{81} \ldots . 0$$

Der Unterschied des ersten Gliedes 2, und des letzten o ist 2. Der Unterschied des ersten und zweyten Gliedes ist $\frac{2}{3}$, also:

$$\begin{array}{lll} 1 & - & - \quad 2 \\ \frac{2}{3} & - & - \quad \frac{4}{3} \end{array} \quad \text{Fac. 4}$$

hierzu 2 ist 6. Am Ende der 6ten Meile.

124) Es mag dieß Kriegsschiff 7 Meilen vom Kaper entfernet seyn; der Kaper mag in einer Stunde 3, das Kriegsschiff in einer Stunde 5 Meilen segeln; so ist der Name $\frac{3}{5}$, die Progression

$$7 + \frac{21}{5} + \frac{63}{25} \text{ u. s. w. bis } 0.$$

Differenz des ersten und zweyten Gliedes $1\frac{4}{5}$, des ersten und letzten 7.

$$\begin{array}{lll} 1 & - & - \quad 7 \\ 1\frac{4}{5} & - & - \quad \frac{21}{5} \end{array} \quad \text{Fac. } 10\frac{1}{5}$$

hierzu das erste Glied 7 ist $17\frac{1}{2}$. Das Kriegsschiff erreicht den Kaper nach $17\frac{1}{2}$ Meilen.

125) Ein Hund läuft in 3 Minuten 25 Ruthen, ein verfolgter Haase in 3 Minuten 10 Ruthen, sie sind 100 Ruthen von einander; auf welcher Ruthe wird der Haase erhascht? Der Name ist $\frac{10}{25}$ oder $\frac{2}{5}$. Die Progression

$$100 + \frac{200}{5} \text{ bis } 0.$$

1 — — 100
60 — — $\frac{200}{7}$ Fac. $66\frac{2}{3}$

hierzu addirt 100, ist die Summe $166\frac{2}{3}$ Ruthen.

Wenn die Geschwindigkeit zweyer Körper in verschiedenen Zeiten bestimmt ist; so ist es nothwendig, daß sie durch die Kettenregel auf eine Zeit gebracht werde, weil die Dinge, welche man mit einander vergleichen will, nach einerley Maaß bestimmt werden müssen. Z. E.

126) Ein Bothe gehet in 2 Stunden 3 Meilen, ein anderer in einer Stunde 2 Meilen; sie gehen beyde zugleich von zwey Orten ab, die 5 Meilen von einander liegen; nach welcher Meile wird der eine den andern einholen?

Man rechne zuvor aus, wie viel Meilen der andere in 2 Stunden zurück legt.

1 Meilen — — 2 Stunden
1 Stunde — — 2 Meilen Fac. 4 Meilen

Der Name ist also $\frac{3}{4}$, die Progression

$5 + \frac{15}{4}$ u. s. w. bis 0.

Die Summe sagt: daß sie sich nach der 20sten Meile einholen.

Man weiß schon, daß dergleichen Aufgaben noch auf eine andere Art berechnet werden können. Es kann also die eine Art der andern zur Probe dienen.

127) Man will nach einer 7 Meilen weit entfernten Stadt reisen, den ersten Tag legt man $\frac{3}{7}$ vom ganzen Wege zurück; an jedem der folgenden Tage will man $\frac{2}{7}$ vom Reste des Weges durchreisen. Wie viel Meilen ist nach jedem Tage der Rest? und wann wird man die Stadt erreichen?

Die Glieder der geometrischen Progression, deren Name $\frac{3}{7}$ ist, sagen, wie viele Meilen man, nach je-

dem Tage noch zu durchreisen habe. $7 : \frac{21}{5} : \frac{63}{25} : \frac{189}{125} : \frac{567}{625} : \frac{1701}{3125}$ u. s. w. Man kömmt der Stadt immer näher, erreicht sie aber nie.

128) Einer ist dem andern 36 Thlr. schuldig, der Debitor will am ersten Tage $\frac{1}{3}$ der ganzen Schuld, und an jedem der folgenden Tage $\frac{1}{3}$ vom Reste des gestrigen Tags entrichten. Wie groß bleibt nach jedem Tage der Rest? und wann ist die Schuld gänzlich getilgt? die Schuld wird nimmer ganz getilgt. Den jedesmaligen Rest sagen die Glieder der Progression, deren Name $\frac{2}{3}$ ist.

$$36 : \tfrac{72}{3} : \tfrac{144}{9} : \tfrac{288}{27} : \tfrac{576}{81} : \tfrac{1152}{243} \text{ u. s. w.}$$
oder $36 : 24 : 16 : 10\frac{2}{3} : 7\frac{1}{9} : 4\frac{20}{27}$ Thlr.

Hätte man $\frac{1}{3}$ zum Namen genommen, so würden die Glieder der Progression gesagt haben, wie viel jeden Tag bezahlt sey, wenn an jedem Tage der dritte Theil von der Bezahlung des gestrigen Tages entrichtet worden.

129) Ein Schiff, das dreymal so geschwind als ein anders segelt, verfolgt das Langsamere, nach der 12ten Meile erreichet es dasselbe. Wie weit sind diese Schiffe anfangs von einander gewesen?

Man weiß schon, daß das erste Glied der geometrischen Progression, deren Name hier $\frac{1}{3}$ ist, die erste Entfernung der Schiffe von einander ausmacht, und daß das letzte Glied o sey. Man weiß, daß die Summe dieser Progression dem Raume gleich sey, welchen der Verfolger bis zur Erreichung der Beute zurück legt. Man nenne also das erste Glied x, so ist die Progression $x + \frac{x}{3}$ bis o, die Summe dieser unendlichen Pro-

gression

gression ist $\frac{3x}{2}$. Diese Summe setze man dem Raume von 12 Meilen gleich, weil beydes eine Sache ist, und finde den Werth von x, so zeigt sich, daß die Entfernung 8 Meilen gewesen.

Nimmt man, um die Probe zu machen, 8 als die erste Entfernung, folglich als das erste Glied einer Progression, deren Name $\frac{1}{3}$, das letzte Glied o ist, und sucht, nach welcher Meile sie sich erreichen; so wird die Summe sagen: nach der 12ten Meile.

Wenn die Glieder einer Progression die Reste einer Terminsweise zu bezahlenden Schuld darstellen sollen: so ist die ganze Schuld das erste Glied; denn im ersten Gliede ist man noch das ganze Capital schuldig; im zweyten fehlt schon ein solcher Theil, als vom ersten Gliede bezahlt ist, u. s. w. Daß hier eine bis ins unendliche fortgesetzte Progression die Schuld nicht ganz erschöpfen könne, ist daher klar, weil man in der Folge nur immer einen Theil vom Reste bezahlt.

Sollen aber die Glieder einer Progression die Posten darstellen, welche bezahlt werden; so sehe man die ganze Schuld als die Summe einer Progression an, deren erstes Glied x ist, oder wo im ersten Termine x bezahlt wird.

130) Eine Schuld von 12 Thlrn ist in 4 Jahren also zu bezahlen, daß in jedem Termine $\frac{2}{3}$ vom jedesmaligen Reste abgetragen werde. Wie viel muß im ersten Termine bezahlt werden? Antw. x Thlr.

Weil der Abtrag immer einen Theil des Restes ausmachen soll, so ist der Name der Rest, wenn $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{3}$ subtrahirt wird; nämlich $\frac{1}{3}$.

Die Aufgabe mit andern Worten ausgedrückt, wäre: man soll eine Progression von vier Gliedern machen, deren erstes Glied x, der Name $\frac{1}{3}$, die Summe 12 ist:

$$x : \frac{x}{3} : \frac{x}{9} : \frac{x}{27} \qquad \text{Summe } \frac{40x}{27}$$

Diese Summe soll gleich 12 seyn.

$$\frac{40x}{27} = 12$$

$$x = \frac{81}{10}$$

Die Progression welche aus diesem ersten Gliede durch den Namen $\frac{1}{3}$ entstehet, enthält, wie viel in jeden Termine bezahlt werden muß; denn das erste Glied bestand aus bezahltem Gelde.

$$\frac{81}{10} : \frac{81}{30} : \frac{81}{90} : \frac{81}{270}$$

oder $8\frac{1}{10} : 2\frac{7}{10} : \frac{9}{10} : \frac{3}{10}$ Thlr.

Will man im ersten Termine etwas willkührliches vom Capitale bezahlen, so kann die Schuld nur alsdann völlig abgetragen werden, wenn die Bezahlung des ersten Termins groß genug gegen die Schuld ist. Ist dieses nicht, so wird die gänzliche Bezahlung unmöglich, wenn der Abtrag auch durch unendliche Termine fortgesetzt würde.

131) Man will 36 Thlr. also bezahlen, daß jeden Tag $\frac{3}{4}$ vom jedesmaligen Reste abgetragen werde; wie viel muß man wenigstens im ersten Termine entrichten, damit die völlige Bezahlung endlich möglich werde? Antwort x Thlr.

Man nehme zum ersten Gliede einer unendlichen Progression, deren Name $\frac{1}{4}$ ist, x. Die Summe dieser Progression ist der Schuld 36 gleich. Die Auflösung giebt das erste Glied der verlangten unendlichen Reihe.

$$x : \frac{\frac{1}{4}x}{4} \ldots 0. \quad \text{Summe } \frac{4x}{3} \quad \frac{4x}{3} = 36$$

$$27 : \frac{\frac{1}{4}27}{4} \ldots 0 \quad \text{Summe } 36 \quad x = 27$$

Es muß im ersten Termine wenigstens 27 Thlr. bezahlt werden, wenn die völlige Bezahlung nach den gegebenen Bedingungen möglich seyn soll. Denn weil eine unendliche Anzahl Termine zur Erstattung der 36 Thlr. nothwendig sind, wenn im ersten 27 Thlr. gegeben worden; so kann weniger als 27 Thlr. die Summe 36 nie machen.

Fordert eine Aufgabe in jedem Gliede einen Theil, nicht von den Resten, sondern von der letzten Bezahlung; so verfährt man wie zuvor, nur mit dem einzigen Unterschiede, daß man den in der Aufgabe bestimmten Theil unverändert zum Namen der Progression behält.

Es kömmt auch hier die Möglichkeit der völligen Bezahlung, auf die Größe des ersten Termins, gegen die Schuld an.

132) Man will eine Schuld von 110 Thlrn. also bezahlen, daß man jeden Tag immer $\frac{2}{5}$ von dem letzten Abtrage entrichtet; wie viel muß man wenigstens den ersten Tag bezahlen, damit die völlige Bezahlung endlich möglich sey? Antwort x Thlr.

Oder, man soll eine unendliche Progression machen, deren erstes Glied x, der Name $\frac{2}{5}$, die Summe 110 ist.

$$x : \frac{\frac{2}{5}2x}{5} \ldots 0. \quad \text{Summe } \frac{5x}{3} \quad \frac{5x}{3} = 110$$

$$x = 66 \text{ Th.}$$

$$66 : \frac{\frac{2}{5}132}{5} : \frac{264}{25} \ldots 0 \quad \text{Summe } 110$$

133) Ein achtzigjähriger Mann der 7000 Thlr. reich ist, glaubt, daß er höchstens noch 5 Jahr leben könne, er will jedes Jahr $\frac{9}{10}$ von dem Aufwande des vorigen Jahrs verzehren, und zwar so, daß nach 5 Jahren sein Geld alle seyn soll. Wie viel muß er im ersten und in den folgenden Jahren ausgeben? Antwort im ersten Jahre x Thlr.

$$x : \frac{9}{10}x : \frac{81}{100}x : \frac{729}{1000}x : \frac{6561}{10000}x \quad \text{S.} \frac{40951}{10000}x$$

$$\frac{40951}{10000}x = 7000$$

$$x = 1709\frac{14741}{40951} \text{ Thlr.}$$

Wenn man den Bruch, welcher etwan $\frac{1}{4}$ Thlr. beträgt, aus der Acht läßt, und die Progression von 5 Gliedern durch den Namen $\frac{9}{10}$ macht, so erhält man den Aufwand aller 5 Jahre.

1) 1709 Thlr.
2) $1538\frac{1}{10}$
3) $1384\frac{29}{100}$
4) $1245\frac{361}{1000}$
5) $1121\frac{1745}{10000}$

Summe $6998\frac{4259}{10000}$

Daß an der völligen Richtigkeit $1\frac{1}{2}$ Thlr fehlt, verursacht der aus der Acht gelaßne Bruch.

134) Beyde, der Stunden und Minutenzeiger einer Taschenuhr stehen auf 12, wo werden sie wieder zusammen treffen, da der Minutenzeiger den Raum von 12 Stunden durchläuft, indem der Stundenzeiger den Raum von einer Stunde zurück legt? das ist

Man soll eine Progression machen, deren erstes Glied 12, der Name $\frac{1}{12}$, das letzte Glied o ist. Die

Summe

Summe dieser Progression sagt die gesuchte Zusammenkunft. Warum muß das erste Glied 12 seyn? Weil man in den Gliedern der Progression die Entfernungen wissen will, und 12 die erste Entfernung der Zeiger bis zur zweyten Zusammenkunft ist. Warum ist der Name $\frac{1}{12}$? weil der Name immer der Quotient ist, wenn des einen Körpers Geschwindigkeit, durch die Geschwindigkeit des andern dividirt wird. Warum ist das letzte Glied 0? Weil die Entfernung von einander 0 wird, wenn die Zeiger sich erreichen. Warum ist die Summe der Progression die Anzahl der Räume durch welche der Minutenzeiger sich bewegt? Weil der Minutenzeiger wirklich alle Räume durchlaufen muß, ehe er den Stundenzeiger erreichen kann.

$$12 : 1 \overset{\frac{1}{12}}{\ldots} 0 \text{ Summe } 13\tfrac{1}{12} \text{ Stunde,}$$

oder der Minutenzeiger trifft wieder mit dem Stundenzeiger zusammen, wenn der letztere auf 1 Uhr 5 Minuten steht.

IV. Abschnitt.

Mathematische Aufgaben.

§. 127

Weil sich eine jede Linie in so viele Theile theilen läßt, als eine Zahl Einheiten hat, so kann man Linien als Zahlen berechnen.

135) Man soll zwo Linien finden, die sich gegen einander verhalten, wie 1 zu 9, und deren Summe 150 sey. Eine ist x, die andere 9x.

$$x + 9x = 150$$
$$10x = 150$$
$$x = 15$$

136) Wenn man die Hälfte einer Linie, mit $\frac{1}{3}$ derselben multiplicirt, kömmt 24 Ruthen. Wie lang ist die Linie? Antwort x Ruthen.

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{xx}{6}$$

$$\frac{xx}{6} = 24 \text{ Ruthen}$$

$$\sqrt{xx} = \sqrt{144}$$

$$x = 12 \text{ Ruthen.}$$

137) Eine Linie ist 36 Ruthen lang, sie soll in zwey ungleiche Theile also getheilt werden, daß, wenn man beyde Theile in einander multiplicirt, das Produkt 299 sey. Wie lang ist jeder Theil? Antwort der eine x, der andere $36 - x$.

$$36x - xx = 299$$

$$xx - 36x = -299$$

$$\sqrt{xx - 36x + 324} = 25$$

$$x - 18 = 5$$

$$x = 23 \text{ Ruthen, die andere } 13 \text{ Ruth.}$$

138) Eine gegebene Zahl oder Linie in den goldenen Schnitt zu theilen; das ist: sie dergestalt in zwey Theile zu theilen, daß sich die ganze Linie zum größern Theil, wie dieser sich zum kleinern verhält.

Die ganze Linie oder die Zahl sey 12, der größere Theil sey x. Weil hier nun ein bestimmtes Verhältniß gefordert wird, so finde man den Namen des kleinsten Theils, welcher der Forderung gemäß seyn muß, durch die Kettenregel; wie 12 zu x, so x zum Namen des kleinsten Theils.

$$1 \text{ — } \text{ — } x \qquad xx$$
$$12 \text{ — } \text{ — } x \quad \text{Fac.} \text{ — }$$
$$12$$

Nun ist der kleinste Theil $\frac{xx}{12}$, und der größere Theil x, der ganzen Linie gleich, daher:

$$\frac{xx}{12} + x = 12$$
$$xx + 12x = 144$$
$$\sqrt{}\ xx + 12x + 36 = \sqrt{}\ 180$$
$$x + 6 = 13\tfrac{41}{100}$$

der größere Theil $x = 7\frac{41}{100}$, der kleinere Theil $4\frac{59}{100}$. Weil 180 keine Rationalzahl ist, so kann man zwar die Wahrheit nicht völlig erreichen, man kann ihr aber so nahe kommen, als man will.

139) Die Höhe eines Triangels ist 5 Ruthen kleiner als die Grundlinie, die Fläche ist 250 Quadratruthen. Wie hoch ist der Triangel, und wie lang seine Grundlinie? die Höhe sey x, so ist die Grundlinie $x + 5$.

Die Fläche eines Triangels wird gefunden, wenn man die ganze Höhe durch die halbe Grundlinie, oder die ganze Grundlinie durch die halbe Höhe multiplicirt, oder, wenn man die ganze Grundlinie durch die ganze Höhe multiplicirt, und das Produkt halbirt. Man drücke daher die Fläche durch x aus, und setze sie der gegebenen Fläche gleich.

$$x + 5 \cdot \frac{x}{2} = \frac{xx}{2} + \frac{5x}{2}$$

$$\frac{xx}{2} + \frac{5x}{2} = 250$$

$$2xx + 10x = 1000$$

$$xx + 5x = 500$$

$$\sqrt{xx + 5x + 6\frac{1}{4}} = \sqrt{506\frac{1}{4}}$$

$$x + 2\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}$$

$x = 20$ R. Die Grundlinie $= 25$ R

140) Die Grundlinie eines rechtwinklichten Triangels ist zweymal so groß, als die Höhe; die Fläche hält 169 Ruthen. Wie groß ist die Grundlinie? wie groß die Höhe? Antwort die Höhe $= x$, die Grundlinie $= 2x$.

$$2x \cdot \frac{x}{2} = xx \text{ Fläche}$$

$$\sqrt{xx} = \sqrt{169}$$

$x = 13$, die Grundlinie $= 26$.

141) Die Länge eines Rectanguli oder länglichten Vierecks, ist 10 Ruthen größer als die Breite, die Fläche hält 11000 Fuß. Wie viele Fuß hält die Länge? wie viele die Breite? Antwort die Breite x, die Länge $x + 10$.

Die Fläche eines Rectanguli wird gefunden, wenn man die Länge und Breite durcheinander multiplicirt.

$$xx + 10x = 11000$$
$$\sqrt{xx + 10x + 25} = \sqrt{11025}$$
$$x + 5 = 105$$
$$x = 100 \text{ Ruthen.}$$

142) Man will einen Garten anlegen, der 2000 Ruthen halten soll. Die Länge soll die Breite $1\frac{2}{3}$ mal in sich fassen. Wie lang und breit muß der Garten angelegt werden? Antw. x Ruthen breit, $1\frac{2}{3}x$ lang.

$$\text{Fläche } \frac{5xx}{3} = 2000$$
$$5xx = 6000$$
$$\sqrt{xx} = \sqrt{1200}$$
$$\text{Breite } x = 34\frac{65}{100}$$
$$\text{Länge } 57\frac{3}{4} \text{ Ruthen}$$

143) Ein Fußboden kostet 100 Thlr., der Quadratfuß ist für 3 Gr. bedungen. Wie viele Fuß hält der Boden? Antw. x Fuß.

1 Gr. — — x Fuß
1 Fuß — — 3 Gr. Fac. 3x Gr. 100 Th. = 3600 Gr.

$$3x = 3600$$
$$x = 1200 \text{ Fuß}$$

144) Eine Zirkelfläche hält $50\frac{2}{7}$ Quadratruthen, wie groß ist der Durchmesser? Antw. x Ruthen.

Da sich der Durchmesser eines Zirkels zum Umkreise wie 100 zu 314 verhält; so suche man den Umkreis von dem Durchmesser x, den gefundenen Umkreis multiplicire man mit dem vierten Theile des Durchmessers

messers, mit $\frac{x}{4}$, so erhält man die Fläche. Diese gefundene Fläche ist der gegebenen Fläche gleich.

1 Umkr. — x Durchm. 100 Durchm. — 314 Umkr.

$$\frac{314x}{100} \cdot \frac{x}{4} = \frac{314xx}{400}$$

$$\frac{314xx}{400} = 50\frac{2}{7}$$

$$2198xx = 140800$$

$$r\,xx = r\,64\frac{128}{2198}$$

$$x = 8\frac{1}{10} \text{ Ruthen.}$$

145) Der Inhalt eines Würffels ist 216 Cubicfuß, wie lang ist eine Seite? Antwort x Fuß.

Man erhält den Inhalt eines Würffels, wenn man die Seite mit sich selbst, und dieß Quadrat abermal mit der Seite multiplicirt.

x Seite xx Quadrat xxx Würffel

$$r^3xxx = r^3216$$

$$x = 6 \text{ Fuß.}$$

146) Die Höhe eines gegebenen Fasses verhalte sich zu seinem Durchmesser wie 2 zu 1. Der körperliche Inhalt sey 50 Cubicfuß; wie hoch und wie dick ist das Faß?

Der Durchmesser oder die Dicke sey x Fuß, so ist die Höhe 2x Fuß.

Man

Man suche zum Durchmesser x den Umkreis, ist $\frac{314x}{100}$; diesen Umkreis mit $\frac{1}{4}$ des Durchmessers mit $\frac{x}{4}$ multiplicirt, giebt die Zirkelfläche $\frac{314xx}{400}$; diese Zirkelfläche durch die Höhe 2x multiplicirt, giebt den körperlichen Inhalt $\frac{628xxx}{400}$; dieser Inhalt ist dem gegebenen Inhalte 50 Fuß gleich, weil er derselbe ist.

$$\frac{628xxx}{400} = 50 \qquad 6\tfrac{32}{100} \text{ Höhe}$$

$$628xxx = 20000$$

$$r^3xxx = r^3 31\tfrac{133}{157} \qquad x = 3\tfrac{16}{100} \text{ Dicke}$$

Diesen Bruch drücke man, wie es immer in Brüchen geschieht, wenn die Wurzel ausgezogen werden soll, durch einen Decimalbruch aus, und nehme die Cubicwurzel.

Wenn man aus dem gefundenen Durchmesser $3\frac{16}{100}$ den Inhalt des Fasses findet; so fällt der Inhalt zwischen 49 und 50, er ist $49\frac{2756984}{12500000}$; hätte man die Wurzel durch mehr Decimalstellen gesucht, so wäre man der Wahrheit noch näher gekommen.

Nimmt man das Maaß der Dicke eines Fasses oder eines Stamms vom Baume in der Mitte zwischen der größesten und kleinsten Dicke, so lassen sich runde spitzig zu laufende Körper, als Cylinder wie eben gezeigt ist, bearbeiten.

Der

Der Inhalt einer Kugel, wenn der Durchmesser gegeben ist, wird gefunden, wenn man den Umkreis sucht, diesen Umkreis durch den Durchmesser multiplicirt, hierdurch bekömmt man die Oberfläche der Kugel, diese Oberfläche durch den 6ten Theil des Durchmessers multiplicirt, giebt den Inhalt der Kugel.

147) Der körperliche Inhalt einer Kugel sey 20 Cubiczoll, wie groß ist der Durchmesser? Antw. x Zoll.

Man suche den Inhalt einer Kugel aus dem Durchmesser x, und setze den gefundenen Inhalt dem gegebenen Inhalte gleich.

Umkreis Fläche Inhalt

$$\frac{314x}{100} \cdot x = \frac{314xx}{100} \cdot \frac{x}{6} = \frac{314xxx}{600}$$

$$\frac{314xxx}{600} = 20$$

$$314xxx = 12000$$

$$r^3xxx = r^3 38\tfrac{34}{177}$$

$$x = 3\tfrac{33}{100} \text{ Zoll.}$$

Siebente

Siebentes Kapitel.

Von unbestimmten Aufgaben.

I. Abschnitt.

Aufgaben, die zwo unbekannte Größen enthalten, und nur eine Gleichung liefern.

§. 128.

Daß eine unbestimmte Aufgabe eine solche sey, die mehr unbekannte Größen enthält, als Gleichungen aus derselben hergeleitet werden können, ist bereits gesagt. Die Auflösung derselben bestehet darin, daß man alle möglichen Fälle findet, deren jeder der Aufgabe ein Genüge leistet. Die Auflösung erfordert eine besondere Bearbeitung, welche vornämlich darin bestehet, daß man den Buchstaben, welche die unbekannten Größen bezeichnen, alle Werthe beylegt, die nach der Aufgabe möglich sind.

1) Man soll 16 dergestalt in zwey Theile theilen, daß sich der eine Theil durch 2, der andere durch 4 ohne Rest theilen lasse.

Weil der eine Theil durch 2, der andere durch 4 theilbar seyn soll; so nenne man den einen $2x$, den andern $4y$. Die Gleichung, welche aus der Aufgabe fließet, ist:

$$2x + 4y = 16$$

$$x = \frac{16 - 4y}{2}$$

Aus dem Bruche ziehe man die Ganzen, das ist: man dividire $16 - 4y$ durch den Nenner 2, giebt $x = 8 - 2y$.

Nun hat man den Werth von x, er ist $8 - 2y$. Weil man aber diesen Werth in Zahlen verlanget, und nicht weis, wie viel y ist; so lege man y alle mögliche Werthe bey. Man sieht aber, daß y nicht mehr als 3 seyn könne, weil 2y von 8 muß subtrahirt werden können. Wollte man y als 4 annehmen, so würde 2y seyn 8, welches von 8 subtrahirt 0 gäbe. Man kann also y als 3, als 2, als 1 annehmen, und der Werth von x läßt sich nun ebenfalls in allen diesen dreyen Fällen aus der Gleichung $x = 8 - 2y$ bestimmen. Ist $y = 3$, so muß x seyn 8 weniger 2y, das ist: 8 weniger 6 ist $x = 2$.

$y = 3$	$y = 2$	$y = 1$
$y = 3$	$y = 2$	$y = 1$
$x = 2$	$x = 4$	$x = 6$

Nun ist zwar der Werth von x und y, in allen möglichen Fällen durch Zahlen bestimmt, allein der Aufgabe ist noch kein Genüge geschehen, denn man nahm gleich Anfangs den ersten Theil nicht als x, sondern als 2x, den andern nicht als y, sondern als 4y an. Daher muß, um die gesuchten Theile zu erhalten, der Werth von x doppelt, der Werth von y viermal genommen werden. Oder welches einerley ist: man nimmt in obigen dreyen Columnen den Werth von x und y so oft, als es die Gleichung $2x + 4y = 16$ sagt. Dieß giebt nun die gesuchten Theile. $4 + 12$ oder $8 + 8$ oder $12 + 4$.

2) Man

2) Man soll 25 also in zwey Theile theilen, daß sich der eine durch 2, der andere durch 3 ohne Rest dividiren lasse.

Weil der eine Theil durch 2, der andere durch 3 theilbar seyn soll; so ist der erste 2x, der andere 3y. Die Aufgabe giebt die Gleichung.

$$2x + 3y = 25$$

$$x = \frac{25 - 3y}{2}$$

Man dividire, um die Ganzen zu erhalten, den Zehler $25 - 3y$ durch den Nenner 2, giebt

$$x = 12 + \tfrac{1}{2} - y - \frac{y}{2},$$

oder weil die Brüche immer am Ende des Quotienten angehangen werden; so ist $x = 12 - y + \frac{1-y}{2}$. Es muß sich also $1 - y$ durch 2 theilen lassen. Läßt sich aber $1 - y$ durch 2 theilen, so läßt sich auch $y - 1$ durch 2 theilen. Denn wenn der erste Ausdruck auf die andere Seite der Gleichung geworfen würde; so würde der zweyte erscheinen. Um aber die Theilung des Bruchs durch 2 möglich zu machen, nehme man 2v statt $y - 1$ an.

$$y - 1 = 2v$$

$$y = 2v + 1$$

Der Werth von y ist also $2v + 1$. Diesen Werth von y setze man statt y in die Gleichung. $x = 12 - y + \frac{1-y}{2}$

$\frac{1-y}{2}$ so bekömmt man $x = 12 - 2v - 1 + \frac{1-2v-1}{2}$ oder

$2x = 24 - 4v - 2 + 1 - 2v - 1$

oder $2x = 22 - 6v$

$x = 11 - 3v$

Aus diesem Werthe von x siehet man, daß 3v nicht größer als 11 seyn darf, weil 3v von 11 muß subtrahirt werden können, folglich das v nicht höher als 3 angenommen werden könne. Aus dem Werthe von y, nämlich $y = 2v + 1$ sieht man, daß v gleich 0 angenommen werden könne. Denn ist $v = 0$; so behält y noch einen positiven Werth, nämlich 1. Man siehet also hieraus, daß vier Auflösungen statt finden.

Man kann also den Werth von x, nämlich $x = 11 - 3v$, und den Werth von y nämlich $y = 2v + 2$ auf viererley Art in Zahlen ausdrücken, nachdem man $v = 0$, $v = 1$, $v = 2$, $v = 3$ annimmt.

$v = 0$	$v = 1$	$v = 2$	$v = 3$
$x = 11$	$x = 8$	$x = 5$	$x = 2$
$y = 1$	$y = 3$	$y = 5$	$y = 7$

Nun ist zwar x und y durch Zahlen ausgedrückt, weil aber die erste Gleichung sagt: daß 2x und $3y = 25$ sey; so müssen die gefundenen Werthe von x zweymal, die Werthe von y dreymal genommen werden. Die gesuchten Theile sind daher

$22 + 3$ oder $16 + 9$ oder $10 + 15$ oder $4 + 21$

Dieß sind nun alle möglichen Theile, in welche 25 dergestalt zerlegt werden kann, daß der erste durch 2, der andere durch 3 aufgehet.

§. 129.

§. 129.

Ehe wir zu mehrern Aufgaben schreiten, wird es nöthig seyn, zu zeigen, wie man ohne einen Irthum befürchten zu dürfen, einen Buchstaben am bequemsten in den andern verwandeln könne. Es sey

$y = +4v - 3$. Es soll dieser Werth von y statt y in eine Gleichung getragen werden, welche $+5y$ enthält. Das ist: man soll den Werth $+4v - 3$ so oft nehmen, als der Buchstabe y sagt, oder man soll den Werth durch $+5$ multipliciren. Es gilt hier, was bey jeder Multiplication gilt, daß nämlich gleiche Zeichen + ungleiche — geben, statt $5y$ hat man also $+20v - 15$. Enthielte die Gleichung $-5y$: so würde man erhalten $-20v+15$.

3) Man soll 64 in zwey Theile theilen, so, daß der eine in 4, der andere in 9 aufgeht.

$$4x + 9y = 64$$
$$4x = 64 - 9y$$
$$x = \frac{64 - 9y}{4}$$ die Ganzen ausgezogen
$$x = 16 - 2y - \frac{y}{4}$$

Weil y durch 4 theilbar seyn soll, so nehme man $4v$ statt y, das ist: $y = 4v$. Diesen Werth von y statt y in den Werth von x getragen, giebt $x = 16 - 8v - v$ oder $x = 16 - 9v$.

Weil $9v$ nicht über 16 seyn kann, so kann $1v$ nicht über 1 seyn. Dieß giebt nur eine mögliche Auflösung:

$x = 16 - 9v$, $y = 4v$

$v = 1$

$x = 7$ die gesuchten Theile sind $28 + 36$

$y = 4$

4) Die Zahl 100 soll also in zwey Theile getheilt werden, daß, wenn der eine durch 5 dividirt wird, 2 übrig bleiben, und wenn der andere durch 7 dividirt wird, 4 übrig bleiben. Wie groß sind die Theile?

Weil der eine durch 5 dividirt, 2 übrig lassen soll, so nenne man ihn $5x+2$, und weil der andere durch 7 dividirt, 4 übrig lassen soll, so nenne man ihn $7y+4$, übrigens verfahre man wie zuvor; weil beyde Theile zusammen 100 seyn sollen, so ist:

$$5x + 2 + 7y + 4 = 100$$
$$5x + 7y = 94$$
$$5x = 94 - 7y$$
$$x = \frac{94 - 7y}{5}$$
$$x = 18 - y + \frac{4 - 2y}{5}.$$

Es muß daher $4 - 2y$ oder $2y - 4$, folglich auch die Hälfte $y - 2$ durch 5 theilbar seyn, man setze daher

$$y - 2 = 5v$$
$$y = 5v + 2$$

Diesen Werth von y trage man statt y in den Werth

von

von x, in $18 - y + \frac{4-2y}{5}$ ist $x = 18 - 5v - 2 + \frac{4-10v-4}{5}$ oder

$x = 16 - 7v$ $\qquad$ $y = 5v + 2$

$v = 0$	$v = 1$	$v = 2$
$x = 16$	$x = 9$	$x = 2$
$y = 2$	$y = 7$	$y = 12$

Diese Werthe von x und y aus der Gleichung $5x + 2 + 7y + 4 = 100$ genommen, oder welches einerley ist: die Werthe von x durch 5 multiplicirt, und 2 darzu addirt, und die Werthe von y durch 7 multiplicirt, und 4 darzu addirt, giebt die gesuchten Theile

82 + 18, 47 + 53, 12 + 88

5) Zwey Personen haben zusammen 100 Aepfel, wenn die eine die ihrigen zu 8 überzählt, so bleiben 7 übrig; wenn die andere die ihrigen zu 10 überzählt, so bleiben auch 7 übrig; wie viel Aepfel hat eine jede? Antwort die eine hat $8x+7$, die andere $10y+7$.

$$8x + 7 + 10y + 7 = 100$$
$$8x + 10y = 86$$
$$x = \frac{86 - 10y}{8}$$
$$x = 10 - y + \frac{3-y}{4}$$

$y - 3 = 4v$
$y = 4v + 3$

Dieſen Werth von y ſtatt y in den Werth von x getragen, giebt $x = 10 - 4v - 3 + \frac{3 - 4v - 3}{4}$

$4x = 40 - 16v - 12 + 3 - 4v - 3$ oder

$x = 7 - 5v$	$y = 4v + 3$
$v = 0$	$v = 1$
$x = 7$	$x = 2$
$y = 3$	$y = 7$

Die gefundenen Werthe von x und y aus der Gleichung $8x + 7 + 10y + 7 = 100$ genommen, giebt die geſuchte Anzahl:

die Eine	63	oder	die Eine 23
die Andere	37		die Andere 77
	100		100

6) 464 Thlr. iſt der Preis für einige Pferde und Ochſen; ein Pferd koſtet 24 Thlr., ein Ochſe 16 Thlr.; wie viele ſind der gekauften Pferde, wie viele der Ochſen geweſen? Antwort x Pferde, y Ochſen.

Die Kettenregel ergiebt, daß 24x Thlr. der Preis aller x Pferde, 16y Thlr. der Preis aller y Ochſen ſey.

$24x + 16y = 464$

$16y = 464 - 24x$

$y = \frac{464 - 24x}{16}$ die Ganzen genommen

$y = 29 - x - \frac{x}{2}$

Weil

Weil x durch 2 theilbar seyn muß, so setze man $x = 2v$, und trage $2v$ statt x in den letzten Werth von y, giebt:

$$y = 29 - 2v - v$$
$$y = 29 - 3v \qquad x = 2v$$

Der Quotient, wenn 29 durch 3 dividirt wird, zeigt, daß v nicht größer als 9; der Werth von x, daß v nicht o seyn könne; denn wäre $v = o$; so hätte x gar keinen Werth.

Um nun den Werth von x und y, nämlich $x = 2v$, und $y = 29 - 3v$, durch Zahlen ausgedrückt zu erhalten, gebe man v den Werth von 1 bis 9, wodurch 9 Auflösungen erhalten werden, welche alle das leisten, was die Aufgabe fordert, von welchen ich deswegen nur einige hersetzen will, weil ein jeder die Uebrigen mit leichter Mühe findet.

Weil man Anfangs die Anzahl des Viehes x und y angenommen, so ist auch der durch Zahlen ausgedrückte Werth, von x und y, die gesuchte Anzahl.

	$v = 9$	$v = 8$	$v = 7$
	$x = 18$ Pf.	$x = 16$ Pf.	$x = 14$ Pf.
	$y = 2$ Ochs.	$y = 5$ Ochs.	$y = 8$ Ochs.
Thlr.	432 + 32	384 + 80	336 + 128

$v = 6$	$v = 5$
$x = 12$ Pf.	$x = 10$ Pf.
$y = 11$ Ochs.	$y = 14$ Ochs.
288 + 176	240 + 224

Die untersten Reihen dieser Tabellen, sind die Preise des Viehes. Z. E. 18 Pferde kosten 432 Thlr., 2 Ochsen 32 Thlr.; diese Preise wurden aus der ersten Gleichung $24x+16y=464$ Thlr. bestimmt. Man durfte nur die Anzahl der Pferde durch 24, die Anzahl der Ochsen durch 16 multipliciren. Weil die Summe des Geldes einer jeden Columne 464 Thlr. beträgt, so ist dieß ein Beweis, daß die Anzahl des Viehes in jeder Columne, nach der Aufgabe richtig bestimmt sey.

Damit man das gezeigte Verfahren deutlich einsehen möge, will ich bey der Auflösung der folgenden Aufgabe den Grund anzeigen, warum man so verfahren müsse, als man verfährt.

7) Die Zahl 11 soll dergestalt in zwey Theile getheilt werden, daß sich der eine Theil durch 2, der andere durch 3 ohne Rest theilen lasse.

Man nenne den einen Theil $2x$, den andern $3y$. Warum? weil am Ende der Arbeit der gefundene Werth von x zweymal, der Werth von y dreymal genommen wird; so muß sich nothwendig der zweyfache Werth von x in zwey, der dreyfache Werth von y in drey Theile theilen lassen; und dieß fordert die Aufgabe.

Weil die Summe beyder Theile 11 seyn soll, so ist

$$2x + 3y = 11 \quad \text{oder} \quad x = \frac{11-3y}{2}$$

Dieser gefundene Werth von x, nämlich $\frac{11-3y}{2}$, soll

nach

nach der Aufgabe durch 2 theilbar seyn. Um zu erfahren, wie viel hieran fehle, dividire man den Zehler durch den Nenner 2; giebt:

$$x = 5 - y + \frac{1 - y}{2}$$

Nun nehme man aus einer doppelten Ursache den Zehler $1 - y$ als $2v$ an. Einmal, damit er durch 2 theilbar werde, zweytens, damit man den Werth von y gehörig erhalte. Man kann aber statt $1 - y$ setzen $y - 1$. Denn, wenn man den Zehler und Nenner des Bruchs durch -1 multiplicirt, so verändern sich die Zeichen, nicht aber der Werth des Bruchs.

$$y - 1 = 2v$$
$$y = 2v + 1$$

Der Werth von y ist also $2v + 1$. Diesen Werth von y trage man statt y in den Werth von x, nämlich $x = 5 - y + \frac{1 - 9}{2}$; hierdurch wird dieser Werth, der zuvor nicht theilbar war, gewiß durch 2 theilbar, $x = 5 - 2v - 1 + \frac{1 - 2v - 1}{2}$. Schaffet man nun bekanntermaaßen den Nenner weg, und zieht die Gleichung zusammen, so wird hierdurch nur der Ausdruck, nicht das wesentliche der Gleichung verändert, und man erhält für x den Werth $4 - 3v$.

Nun hätte man den Werth von x und y, nämlich $x = 4 - 3v - y = 2v + 1$; allein in beyden befindet sich noch der Buchstabe v. Man weiß nicht,

wie viel v eigentlich ist, und will doch den Werth von x und y in Zahlen wissen. Um dieses zu erhalten, lege man v alle hier mögliche Werthe in Zahlen bey, wodurch man die Größe von x und y in Zahlen erhält. Man kann aber v nicht höher als 1 annehmen, denn der Werth von x sagt: daß 3v von 4 soll abgezogen werden können. Man kann aber v auch = 0 annehmen, denn der Werth von y sagt: ist v gleich 0; so bleibt für y noch der Werth von 1 übrig. Es sind also zwo Auflösungen übrig.

v = 0	v = 1
x = 4	x = 1
y = 1	y = 3

Hier hat man den Werth von x und y gehörig in Zahlen ausgedrückt; weil aber nach der ersten Gleichung dieser Aufgabe nicht x und y, sondern 2x + 3y = 11 ist, so müssen die beyden gefundenen Werthe von x durch 2, die Werthe von y durch 3 multiplicirt werden. Die gesuchten Theile sind daher

8 + 3 oder 2 + 9.

8) Man soll 13 also in zwey Theile theilen, daß sich der eine durch $\frac{2}{1}$, der andere durch $\frac{3}{4}$ theilen lasse.

$$\frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = 13$$

$$8x + 9y = 156$$

$$x = \frac{156 - 9y}{8}$$ die Ganzen genommen

$$x = 19 - y + \frac{4-y}{8}, \quad \left| \begin{array}{l} y-4=8v \\ y=8v+4 \end{array} \right.$$

$$x = 19 - 8v - 4 + \frac{4 - 8v - 4}{8}$$

oder $x = 15 - 9v$

$v = 0$	
x	$= 15$
y	$= 4$
10	+ 3

$v = 1$	
x	$= 6$
y	$= 12$
4	+ 9

II. Abschnitt.

§. 130.

Aus zwo Gleichungen drey oder mehr unbekannte Größen zu finden.

9) Dreyßig Personen, Männer, Frauen, und Kinder, verzehren zusammen 50 Thlr. Ein Mann hat verzehrt 3 Thlr., eine Frau 2 Thlr., ein Kind 1 Thlr. Wie viel Personen sind von jeder Art gewesen? Antwort p = Männer, q = Frauen, r = Kinder.

Diese

Diese Aufgabe liefert zwo Gleichungen; 1) alle Männer, Frauen und Kinder sind = 30 Personen, oder $p + q + r = 30$; 2) was alle Personen verzehrt haben, ist = 50 Thlr. oder $3p + 2q + r = 50$. Diesen Ausdruck findet man durch die Kettenregel, wenn man sucht, wie viel p Männer verzehren, da 1 Mann 3 Thlr. verzehrt. Es wäre zwar in diesem und ähnlichen Fällen nicht nothwendig die Kettenregel anzuwenden, weil sich das Facit zu leicht ergiebt; allein man sieht in der Anwendung der Kettenregel den Grund ein, warum das verzehrte Geld 3p, 2q, r werde; und in den Fällen, da die erste gegebene Zahl größer als Eins, oder ein Bruch ist, wäre die Anwendung der Kettenregel nothwendig.

Es sind also die beyden Gleichungen

$$p + q + r = 30 \text{ und } 3p + 2q + r = 50$$

Um sowol eine Gleichung, als auch einen Buchstaben abzuschaffen, bringe man einen Buchstaben der ersten Gleichung, welchen man abschaffen will, allein auf eine Seite.

$$r = 30 - p - q$$

Dieß ist der Werth von r, welcher bald zur Entwickelung der Aufgabe gebraucht wird. Diesen Werth setze man statt r in die andere Gleichung; oder, welches in diesem Falle einerley ist: man subtrahire die erste Gleichung von der zweyten.

$$\begin{array}{rrrr} 3p & + 2q & + r & = 50 \\ p & + q & + r & = 30 \\ \hline 2p & + q & & = 20 \end{array}$$

Man

Man hätte eben dieses erhalten, wenn man nach der oft gebrauchten Methode, in beyden Gleichungen den Buchstaben r allein auf eine Seite gebracht, und die beyden Gleichungen ohne r durchs Zeichen der Gleichheit mit einander verbunden hätte.

Um nun auch den Werth von q zu erhalten, bringe man q allein auf eine Seite. $q = 20 - 2p$. Weil p aus der Gleichung nicht weggeschafft werden kann, und man den Werth der Buchstaben in Zahlen verlanget; so gebe man p den Werth von 0, von 1, von 2, bis 10, höher kann man nicht gehen, weil 2p von 20 abgezogen werden soll. Der Werth von q und r wird sodann die gesuchte Anzahl, Frauen und Kinder bestimmen.

$q = 20 - 2p$ $\quad$ $r = 30 - p - q$

Männer	$p =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frauen	$q =$	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0
Kinder	$r =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Durch diese 10 Auflösungen sind alle möglichen Fälle bestimmt.

10) Man kauft 100 Stück Vieh für 100 Thlr., ein Schwein kostet $3\frac{1}{2}$ Thlr., eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Thlr., ein Schaaf $\frac{1}{2}$ Thlr.; wie viel Stück hat man von jeder Art gekauft? Antwort $p =$ Schweine, $q =$ Ziegen, $r =$ Schaaffe. Diese kosten $3\frac{1}{2}p$, $1\frac{1}{3}q$, $\frac{1}{2}r$ Thlr.

Die Gleichungen sind:

$p+q+r=100$ und $3\frac{1}{2}p+1\frac{1}{3}q+\frac{1}{2}r=100$ oder

$r=100-p-q$ $\quad \frac{7}{2}p+\frac{4}{3}q+\frac{r}{2}=100$

Aus der zwoten Gleichung die Nenner weggeschaffet, giebt:

$$42p+16q+6r=1200 \text{ oder}$$
$$21p+8q+3r=600$$

In diese Gleichung den Werth von r statt r gesetzt, giebt:

$$21p+8q+300-3p-3q=600 \text{ oder}$$
$$18p+5q=300$$
$$q=60-\frac{18p}{5}$$

Also muß 18p durch 5 theilbar seyn, folglich auch p; man setze daher $p=5v$, so ist

$$q=60-18v \text{ und}$$
$$r=100-5v-60+18v \text{ oder}$$
$$r=13v+40.$$

Nimmt man nun v als 1, 2, 3 an; so erhält man aus dem Werthe von p, q, r, die gesuchte Anzahl Vieh.

p =

$p = 5v$, $q = 60 - 18v$, $r = 13v + 40$

$v = 1$	$v = 2$	$v = 3$
$p = 5$	$p = 10$	$p = 15$
$q = 42$	$q = 24$	$q = 6$
$r = 53$	$r = 66$	$r = 79$
100	100	100

11) Man kauft für 100 Thlr. insgesammt 100 Pfund, theils Safran, Zimt, Thee und Coffee; ein Pfund Safran kostet 10 Thlr., ein Pfund Zimt 5, ein Pfund Thee 2, und ein Pfund Coffee $\frac{1}{2}$ Thlr. Wie viel Pfund hat man von jeder Art gekauft? Antwort p = Safran, q = Zimt, r = Thee, s = Coffee.

$p + q + r + s = 100$ Pf. $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$ Thr.

Von der zweyten Gleichung die erste subtrahirt

$$\begin{array}{rl} 20p + 10q + 4r + s = & 200 \\ p + q + r + s = & 100 \\ \hline \text{Rest } 19p + 9q + 3r = & 100 \end{array}$$

Aus diesem Reste den Werth eines Buchstabens gesucht.

$$r = 33 - 6p - 3q + \frac{1 - p}{3}$$

Weil $p - 1$ durch 3 theilbar seyn muß, so setze man

$$p - 1 = 3v$$
$$p = 3v + 1$$

Diesen Werth von p statt p in den Werth von r getragen, giebt:

$$r = 33 - 18v - 6 - 3q + \frac{1-3v-1}{3}$$

oder $r = 27 - 19v - 3q$

Nun hat man den Werth von p und r. Werden die gefundenen Werthe dieser Buchstaben statt p und r in die Gleichung $19p + 9q + 3r = 100$ getragen, und der Werth von q gesucht, so bekömmt man $q = q$; denn die übrigen Größen heben sich einander auf.

Die drey gefundenen Werthe von p, r, q, statt dieser Buchstaben in die Gleichung $10p + 5q + 2r + s = 100$ getragen, und den Werth von s gesucht, giebt:

$$s = 72 + 16v + 2q$$

Man hätte also in dem gefundenen Werthe aller vier Buchstaben, die gesuchte Anzahl Pfunde; nämlich:

$$p = 3v + 1$$
$$q = q$$
$$r = 27 - 3q$$
$$s = 72 + 16v + 2q$$

Weil aber diese Werthe noch die Buchstaben v und q enthalten; man aber solche in Zahlen zu wissen verlangt, so nehme man erstlich v als 0, und v als 1 an; höher kann man, wie der Erfolg zeigen wird, nicht gehen; hierdurch bringet man v weg, und erhält;

v =

$v = 0$	$v = 1$
$p = 1$	$p = 4$
$q = q$	$q = q$
$r = 27 - 3q$	$r = 8 - 3q$
$s = 27 + 2q$	$s = 88 + 2q$

Um nun auch q abzuschaffen, nehme man auch q nach Belieben an, nur daß $19v + 3q$ nicht größer als 27 seyn muß. In dem Falle das $v = 0$ ist, kann man q von 0 bis 9 annehmen, denn ist $q = 9$, so ist $3q = 27$. In dem Falle das $v = 1$ ist, kann man $q = 0 = 1 = 2$ annehmen. Wollte man $q = 3$ setzen, so würde $19v + 3q$ schon 28 machen, da es höchstens nur 27 betragen darf.

Die folgende Tabelle enthält deswegen zehn Auflösungen der Aufgabe, weil man in derselben q von 0 bis 9 hat annehmen können. Sie ist aus der Tabelle $v = 0$ entstanden.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Nach der Tabelle $v = 1$ kann man q von 0 bis 2 annehmen. Dieses giebt also noch drey Auflösungen, welche die Tabelle $v = 1$ und der Werth von q bestimmt.

	I.	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Weil nach der Aufgabe überhaupt 100 Pfund gekauft sind, so ist die Summe einer jeden Columne in beyden Tabellen 100. Rechnet man den Werth der Pfunde in einer jeden Columne nach der Angabe der Aufgabe aus, so beträgt die Summe ebenfalls 100 Thlr., weil alle Pfunde 100 Thlr. kosten; wodurch die Richtigkeit der Auflösung geprüft und bestätiget wird.

Ende.

Druckfehler.

Seite 11. Zeile 5. statt 1246 ließ 1164

S. 22. Z. 10. statt 18640, ließ 18604

S. 86. Z. 5. statt 648 ließ $655\frac{5}{7}$

S. 87. Z. 11. statt 14^2 ließ $14\frac{2}{5}$

S. 101. Z. 8. statt in einander ließ im Produkt

S. 109. Z. 7. statt $\frac{3}{35}$ ließ $\frac{3}{5}$

S. 121. Z. 16. statt $\frac{2}{4}$ ließ $\frac{1}{4}$

S. 124. Z. 3. von unten, statt Divisor nichts, ließ, Divisor oft nichts.

S. 132. Z. 14. 15. statt 1 Pf. ist $\frac{1}{4}$ ließ 2 Pf. ist $\frac{1}{2}$.

S. 133. Z. 11. von unten, statt 3 ließ 2

S. 142. Z. 16. statt Nullen verändert, ließ, Nullen nicht verändert

S, 149. Z. 11. und 13. statt 376 ließ 367

S. 186. Z. 10. statt 9656 ließ 9756, statt 655 ließ 654

S. 200. Z, 1. von unten fehlt 32 Centn. — — 1 Pfund

S. 206. Z. 16. statt 28 ließ 48

S. 207. Z. 17. statt 1 Quentg. ließ 4 Quentg.

S. 215. Z. 15. statt $24\frac{1}{3}$ ließ $42\frac{1}{3}$

S. 216. Z. 10. statt $23\frac{11}{48}$ ließ $13\frac{11}{48}$

S. 223. Z. 11. von unten, statt $4\frac{1}{1}\frac{4}{8}\frac{9}{8}\frac{2}{1}\frac{1}{6}$ ließ $5_1\frac{9}{7}\frac{0}{8}\frac{4}{5}\frac{}{7}$

S. 243. Z. 6. von unten statt $4\frac{101}{320}$ ließ $8\frac{101}{1600}$

S. 248. Z. 12. von unten, statt 786 ließ 768

S. 269. Z. 9. statt multiplicire ließ dividire

S. 271. Z. 19. statt $\frac{12}{40}$ ließ $9\frac{12}{40}$

S. 315. Z. 5. statt der Zehler, ließ der weggestrichne Zehler

S. 316. Z. 4. statt erste ließ zwote

S. 337. Z. 7. vorne statt — d ließ + d

Daselbst Z. 2. statt c. + — ließ $c + \frac{c}{b}$

S. 360. Z. 12. von unten, statt $\frac{c}{24}$ ließ $\frac{b}{24}$

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google